

283 | März 1972

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

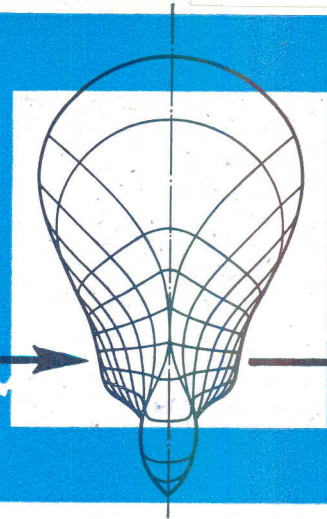
M. Kloppenburg

Der Einfluss elastischer Platten (Schiffswände) auf das hydroakustische Propellerdruckfeld

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Der Einfluß elastischer Platten (Schiffswände)
auf das hydroakustische Propellerdruckfeld

M. Kloppenburg

März 1972

Bericht Nr. 283

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr.283

Der Einfluß elastischer Platten (Schiffswände)
auf das hydroakustische Propellerdruckfeld

M.Kloppenburg

Forschungsauftrag BMVtdg T0250/92550/91552
Hamburg, März 1972

Übersicht:

In der vorliegenden Arbeit wird das hydroakustische Druckfeld einer vom Propeller zu Schwingungen angeregten ebenen elastischen Platte bestimmt. Die Umgebung der elastischen Platte ist starr; jedoch wird theoretisch auch der Fall behandelt, daß die Umgebung durch die Wasseroberfläche gebildet wird. Die errechneten Ergebnisse werden mit dem hydroakustischen Druckfeld des Propellers verglichen.

Außerdem wird die Möglichkeit, die anregende Druckkraft durch Rückpfeilung des Propellers zu verringern, theoretisch angegeben und durch Rechenbeispiele belegt.

Summary:

The hydroacoustic pressure field of an oscillating elastic flat plate excited by the field of a ship's propeller is calculated. The environment of the elastic flat plate is considered to be rigid; However, theoretical prediction is also given for the case that the water surface forms the environment. The numerical results are compared with the propeller's hydroacoustic pressure field.

In addition, the possibility of decreasing the exciting pressure by using a skewed propeller is dealt with theoretically and confirmed by numerical examples.

Inhalt:

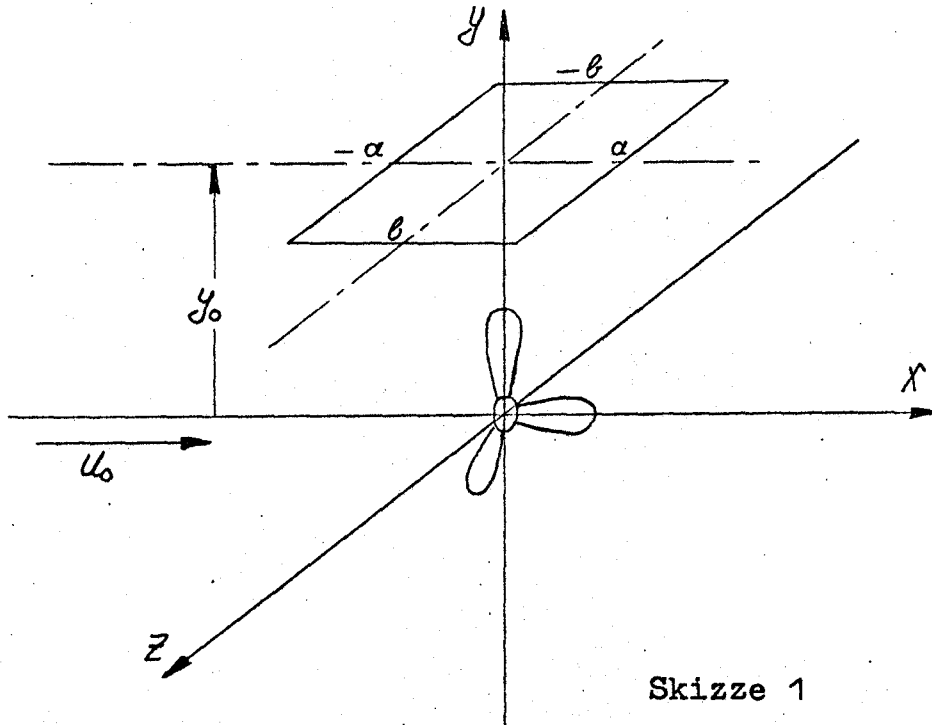
Der Einfluß elastischer Bauteile auf das hydroakustische Druckfeld eines Schraubenpropellers	S. 2
1. Herleitung des Zusatzpotentials zur Erfassung des Einflusses der Elastizität	S. 5
2. Das auf Grund der Elastizität abgestrahlte Fernfeld	S. 19
3. Die elastische Platte umgeben von der Wasseroberfläche	S. 25
4. Zur Berechnung des von einem Schraubenpropeller induzierten instationären Druckfeldes	S. 29
5. Die orthotrope Platte	S. 36
6. Beispiele	S. 42
6.1 Zur Berechnung des Propellerdruckfelds am Ort y_0	S. 42
6.2 Die Bestimmung des Zusatzpotentials ϕ_{II} , das den Einfluß der Elastizität wiedergibt	S. 44
6.3 Die Abstrahlung ins Fernfeld durch die schwingende Platte	S. 48
6.4 Die vom Propeller selbst im Fernfeld induzierten Druckschwankungen	S. 52
6.5 Ergebnisse zum rückwärts (skew) gepfeilten Propeller	S. 56
Anhang: Momentenfrei gelagerte Rechteckplatte bei starrer Umgebung	S. 57
Schlußbemerkung	S. 65
Schrifttum	S. 67
Bilder 1-27	S. 69

Der Einfluß elastischer Bauteile auf das hydroakustische Druckfeld eines Schraubenpropellers ⁺⁾

Der Schraubenpropeller endlicher Flügelzahl induziert in seiner Umgebung ein instationäres Druckfeld. Es ist anschaulich, daß dieses Druckfeld, sofern es auf der eigentlichen Propellerströmung beruht, die Periode $2\pi/N$ (N Flügelzahl) besitzt, d.h. jedesmal wenn der nachfolgende Propellerflügel die Stellung des vorhergehenden einnimmt, herrschen wieder die gleichen Zustände. Zerlegt man dieses Druckfeld hinsichtlich seiner Zeitabhängigkeit mittels Fourieranalyse, so werden nur Kreisfrequenzen auftauchen der Form $kN\omega$, wobei $k=1,2,\dots$ eine ganze Zahl und ω die Winkelgeschwindigkeit des Propellers ist. Bei den üblichen Drehzahlen von ca. 2 bis 6 Hz für die Großausführung und ca. 10 Hz bei Modellpropellern und Flügelzahlen von 3 bis 5 ist dieses Druckfeld ausgesprochen niederfrequent. Hochfrequente Druckfeldschwankungen, die in der Umgebung eines Propellers ebenfalls beobachtet werden, haben ihre Ursache nicht in der eigentlichen Propellerströmung, sondern beruhen auf Effekten, die diese eher stören, wie z.B. entstehende, schwingende oder zerfallende Kavitationsblasen. Hierbei können beliebige hochfrequente Druckschwankungen entstehen. Die Betrachtungen in dieser Arbeit beziehen sich auf das zuerst genannte niederfrequente Druckfeld des Propellers. Es ist klar, daß die dort induzierten Druckschwankungen Einfluß haben auf den benachbarten Schiffsrumpf. Unruhe und Schwingungen im Hinterschiff, deren Ursache der Propeller ist, sind von den Schiffbauern jederzeit gefürchtet.

+) Diese Untersuchung wurde durch einen Forschungsauftrag der Fraunhofergesellschaft ermöglicht. Dafür sei an dieser Stelle herzlichst gedankt.

Bei der Untersuchung des Einflusses elastischer Bauteile auf das Propellerdruckfeld soll von folgendem Modell ausgegangen werden: In der Nähe eines arbeitenden Propellers ist eine unendlich große starre Platte angeordnet, die lediglich direkt über dem Propeller einen elastischen Ausschnitt haben soll.



Die Rechnung wird nun so durchgeführt, daß der instationäre Druck an einer starren Platte bestimmt wird. Dabei wird von dem bekannten Ergebnis ausgegangen, daß an einer starren Wand der Druck doppelt so groß ist wie im freien Flüssigkeitsraum. 1) 2)

-
- 1) W.H.Isay: Moderne Probleme der Propellertheorie
Springer Verlag
Berlin Heidelberg New York 1970 S.105-152
 - 2) R.Armonat: Das hydroakustische Druckfeld eines Propellers
Bericht Nr.209 des Instituts für Schiffbau
Universität Hamburg Juni 1968

Wegen des Einflusses des elastischen Plattenausschnitts ist zusätzlich noch ein weiteres Potential zu ermitteln, dessen Ableitung normal zur Platte die elastische Auslenkungsgeschwindigkeit liefert. Dieser Weg zur Behandlung des vorliegenden Problems (allerdings für eine unendlich große elastische Platte ohne Berücksichtigung von Rand- bzw. Einspannbedingungen) wurde zuerst von Tsakonas, Chen und Jacobs ³⁾ ⁴⁾ beschrieben.

Dieses Zusatzpotential bedingt natürlich eine veränderte Abstrahlung ins Fernfeld.

Die Rechnung im Nahfeld, also das Auffinden der Intensität des Zusatzpotentials bzw. seine Ableitung aus der Strömungsrandbedingung an dem elastischen Plattenteil, wird inkompressibel durchgeführt.

Armonat ²⁾ weist anhand numerischer Rechnungen nach, daß in unmittelbarer Nachbarschaft des Propellers inkompressibel gerechnet werden darf.

-
- 3) S.Tsakonas, C.Y.Chen, W.R.Jacobs:
Acoustic Radiation of an Infinite Plate Excited
by the Field of a Ship Propeller
The Journal of the Acoustical Society of America
Vol.36, No.9 September 1964, S.1708-1717
- 4) S.Tsakonas, C.Y.Chen, W.R.Jacobs:
Acoustic Radiation of a Cylindrical Bar Excited
by the Field of a Ship Propeller
The Journal of the Acoustical Society of America
Vol.36, No.8 August 1964, S.1569-1588

1. Herleitung des Zusatzpotentials zur Erfassung des Einflusses der Elastizität

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die Differentialgleichung der Platte, welche infolge der vom rotierenden Propeller ausgehenden Druckschwankungen erzwungene Biegeschwingungen ausführt. Ziel ist es, die Durchbiegung $v(x,z,t)$ dieser Platte anzugeben, bzw. da von einer Seite Wasser an die Platte angrenzt, ein Potential $\phi_{III}(x,y,z,t)$ zu finden, das normal zur Platte abgeleitet am Ort der Platte die Auslenkungsgeschwindigkeit \dot{v} liefert.

Die Dgl. der erzwungenen Plattenbiegeschwingung lautet:

$$1.1) \quad B (\Delta \Delta v) + \rho_p \cdot h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left\{ -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (\phi_I + \phi_{II}) - \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{III} \right\}_{y=y_0}$$

Hier bedeuten:

- v Auslenkung der Platte
- ρ_p Dichte des Plattenmaterials
- h Dicke der Platte
- $B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ Plattensteifigkeit
- E Elastizitätsmodul
- ν Querkontraktionszahl
- ρ_0 Dichte des Wassers im Normalzustand
- u_0 axiale Anströmgeschwindigkeit zum Propeller
- ϕ_I Potential des Originalpropellers
- ϕ_{II} Potential des gespiegelten Propellers entsprechend der Randbedingung einer starren Wand
- ϕ_{III} das durch den elastischen Plattenteil bedingte Zusatzpotential

y_0 Ort der Platte

$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ Laplacescher Operator

$p_I + p_{II} = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) / (\phi_I + \phi_{II}) \Big|_{y=y_0}$ Propellerdruckfeld

$p_{III} = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) / (\phi_{III}) \Big|_{y=y_0}$ induzierter Zusatzdruck

$p_I + p_{II} + p_{III}$ anregendes Druckfeld

(Dabei ist die übliche linearisierte Relation zwischen Druck und Geschwindigkeitspotential zugrunde gelegt.)

Die Anregung auf der rechten Seite von 1.1) besteht aus zwei Anteilen, einmal ist da das Druckfeld an einer starren Platte $p_I + p_{II} = 2p_I$. Dieses wird aber, da ja bedingt durch die Elastizität eine Auslenkungsgeschwindigkeit \dot{v} auftreten wird, zu erweitern sein. Diese Erweiterung steht in dem Term mit ϕ_{III} .

Dieses zusätzliche Potential ϕ_{III} ist so zu bestimmen, daß es die Randbedingung

$$1.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v} = \frac{\partial \phi_{III}}{\partial y} \Big|_{y=y_0}$$

erfüllt.

Differenziert man Gl.1.1) nach der Zeit und setzt dabei 1.2) ein, so erhält man eine Dgl. für das unbekannte Potential ϕ_{III} .

$$1.3) \quad B \left(\Delta \Delta \left(\frac{\partial \phi_{III}}{\partial y} \right) + \rho_p h \frac{\partial^3 \phi_{III}}{\partial y \partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \phi_{III}}{\partial t^2} + \rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \phi_{III}}{\partial x \partial t} - \rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) / (\phi_I + \phi_{II}) \Big|_{y=y_0} \right) =$$

Für ϕ_{III} wird ein Produktenansatz gemacht, dergestalt, daß die Auflagerbedingungen der Platte bereits erfüllt sind.

Dafür kommen die für den Balken bekannten Lösungen in Frage. 5) Dies sind die Kreis- und Hyperbelfunktionen in der Form

$$F_m(x) = a_{1m} \cos \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} + a_{2m} \sin \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} + a_{3m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} + a_{4m} \operatorname{sh} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a}$$

$$G_n(z) = b_{1n} \cos \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + b_{2n} \sin \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + b_{3n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + b_{4n} \operatorname{sh} \frac{\mu_n(z+b)}{2b}$$

Hier sind die Koeffizienten a_{1m} bis a_{4m} , b_{1n} bis b_{4n} durch die jeweiligen Randbedingungen an $x=\pm a$, $z=\pm b$ bestimmt. Die λ_m, μ_n sind die zugehörigen Eigenwerte. Da wir einen Ansatz suchen, der der Laplace Gleichung genügen soll, muß das Produkt aus $F_m(x)$ und $G_n(z)$ folgendermaßen umgeordnet werden:

$$F_m(x)G_n(z) = O_{mn} + B_{mn} + C_{mn} + D_{mn}$$

mit

$$O_{mn} = a_{1m} \cos \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{1n} \cos \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{1m} \cos \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{2n} \sin \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{2m} \sin \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{1n} \cos \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{2m} \sin \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{2n} \sin \frac{\mu_n(z+b)}{2b}$$

$$C_{mn} = a_{1m} \cos \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{3n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{1m} \cos \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{4n} \operatorname{sh} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{2m} \sin \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{3n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{2m} \sin \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} b_{4n} \operatorname{sh} \frac{\mu_n(z+b)}{2b}$$

5) I. Szabó: Höhere technische Mechanik
Springer Verlag
Berlin Göttingen Heidelberg 1958 S.78

$$Q_{mn} = a_{3m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{1n} \cos \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{3m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{2n} \sin \frac{\mu_n(z+b)}{2b} \\ + a_{4m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{1n} \cos \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{4m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{2n} \sin \frac{\mu_n(z+b)}{2b}$$

$$D_{mn} = a_{3m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{3n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{3m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{4n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} \\ + a_{4m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{3n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b} + a_{4m} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m(x+a)}{2a} \cdot b_{4n} \operatorname{ch} \frac{\mu_n(z+b)}{2b}$$

Als Lösungsansatz für die gesuchte Funktion ϕ_{III} soll somit geschrieben werden:

$$1.4) \quad \phi_{III}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \\ \left. \begin{aligned} & \left\{ C_{mnk}^{(1)} e^{\sigma_1(y-y_0)} e^{ikNst} \cdot Q_{mn} \right. \\ & + C_{mnk}^{(2)} e^{\sigma_2(y-y_0)} e^{ikNst} \cdot B_{mn} \\ & + C_{mnk}^{(3)} e^{\sigma_3(y-y_0)} e^{ikNst} \cdot C_{mn} \\ & \left. + C_{mnk}^{(4)} e^{\sigma_4(y-y_0)} e^{ikNst} \cdot D_{mn} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Aus der Laplace Bedingung

$$1.5) \quad \Delta \phi_{III} = 0$$

ergeben sich jeweils zwei mögliche σ -Werte. Sind diese reell, so ist stets der positive zu nehmen, da das Potential ϕ_{III} sonst für $y \rightarrow -\infty$ über alle Grenzen wächst.

Sind die σ -Werte imaginär, so ergibt sich die Auswahl dadurch, daß sie mit der Zeitabhängigkeit $e^{ikN\omega t}$ zu auslaufenden Wellen (Abstrahlbedingung) d.h. des Typs $e^{-i(kN\omega t + \frac{\pi}{2}(y-y_0))}$ kombiniert werden müssen. Einlaufende Wellen sind physikalisch nicht möglich.

Bei der Summation über m und n ist noch folgende

Ungleichung
$$\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 > \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2$$

zu beachten. Solange sie gilt ist σ_2 imaginär und σ_3 reell, gilt sie nicht mehr, ist σ_2 reell und σ_3 imaginär. Aus diesem Grunde wird die Größe N_1 eingeführt, die so bestimmt wird, daß für alle $n \leq N_1$ die Eigenwerte μ_n ($n=1 \dots N_1$) diese Ungleichung erfüllen, für alle $n > N_1$ nicht mehr erfüllen. Dann gilt:

1.6) $\phi_{III}(x, y, z, t) =$

$$\sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ C_{mnk}^{(1)} e^{i\left(\sqrt{\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)\right)} e^{ikN\omega t} A_{mn} + C_{mnk}^{(4)} e^{i\left(\sqrt{\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)\right) \mp nk + kN\omega t} D_{mn} \right\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ C_{mnk}^{(2)} e^{i\left(\sqrt{\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)\right) \mp nk + kN\omega t} B_{mn} + C_{mnk}^{(3)} e^{\sqrt{\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)} e^{ikN\omega t} C_{mn} \right\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=N_1+1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ C_{mnk}^{(2)} e^{\sqrt{-\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)} e^{ikN\omega t} B_{mn} + C_{mnk}^{(3)} e^{i\left(\sqrt{-\left(\frac{\mu_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}(y-y_0)\right) \mp nk + kN\omega t} C_{mn} \right\}$$

Die noch verbleibenden Konstanten $C_{mnk}^{(j)}$ sind aus der Randbedingung 1.2) zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{III}}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \dot{U}(x, y, z, t) &= \sum_{k=-K_0}^{K_0} \dot{U}_k(x, z) e^{ikN_0 t} \\ &= \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} (\alpha_{mn} + \beta_{mn} + \epsilon_{mn} + \delta_{mn}) e^{ikN_0 t} \end{aligned}$$

Dann heißt schließlich der vollständige Lösungsansatz für ϕ_{III} :

1.7) $\phi_{III}(x, y, z, t) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ \frac{A_{mnk}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}} e^{\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} (y-y_0)} e^{ikN_0 t} \alpha_{mn} \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{mnk}}{i\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk}} e^{i\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk} (y-y_0) + kN_0 t\right)} \right\} \delta_{mn} \\ & + \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ \frac{A_{mnk}}{i\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk}\right)} e^{i\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk} (y-y_0) + kN_0 t\right)} \right\} \beta_{mn} \\ & \quad + \frac{A_{mnk}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}} e^{\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} (y-y_0)} e^{ikN_0 t} \epsilon_{mn} \\ & + \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=N_0+1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \left\{ \frac{A_{mnk}}{\sqrt{-\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2}} e^{\sqrt{-\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} (y-y_0)} e^{ikN_0 t} \right\} \beta_{mn} \\ & \quad + \frac{A_{mnk}}{i\sqrt{-\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk}} e^{i\left(\sqrt{-\left(\frac{\lambda_m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{2b}\right)^2} \gamma_{nk} (y-y_0) + kN_0 t\right)} \right\} \epsilon_{mn} \end{aligned}$$

Differenziert man 1.7) nach y , so erkennt man, daß die Ableitung für $y=y_0$ die Auslenkungsgeschwindigkeit einer Platte liefert. Damit ist die Aufgabe, ein für den Raum $y \leq y_0$ definiertes Potential zu finden, erledigt. Die Lösung wird aber nur für den Plattenausschnitt benutzt. Zu der damit verbundenen Problematik werden weiter unten noch einige Betrachtungen für das hier behandelte Beispiel gebracht.

Es bleibt noch die Bestimmung der unbekanntenen Ansatzkoeffizienten. Die weiteren Rechnungen sollen jedoch für den Spezialfall der momentenfrei aufgelagerten Platte durchgeführt werden. Damit wird prinzipiell auch der Rechengang für andere Lagerbedingungen gezeigt. Es dient jedoch der Übersichtlichkeit, sich hier auf diesen einfachen Fall zu beschränken.

Die Auflagerbedingungen der momentenfrei gelagerten Platte lauten:

$$1.8) \quad \sigma = 0; \quad \left. \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0$$

$$\Delta \sigma = 0; \quad \Delta \left. \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0 \quad \text{für } x=\pm a, z=\pm b$$

Die Konstanten a_{1m} , a_{3m} , a_{4m} und b_{1n} , b_{3n} , b_{4n} sind in diesem Fall identisch Null. Die restlichen beiden sind $a_{2m} = b_{2n} = 1$. Die Eigenwerte sind $\lambda_m = m\pi$, $\mu_n = n\pi$.

Für diesen speziellen Fall heißt der Ansatz für das Zusatzpotential:

$$1.9) \quad \phi_{\text{III}}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} \frac{A_{mnk}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}} e^{ikN\omega t}$$

$$\sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2} (y-y_0)}$$

Dieser Ansatz beinhaltet, die gesuchte Funktion wird approximiert mittels eines vollständigen Funktionensystems, das von vorneherein die gewünschten Randbedingungen erfüllt.

Hier ist zu sagen: Das oben angegebene Modell ist mit diesem Ansatz 1.9) nicht voll getroffen, da er für x und z beiderseits periodisch bis ins Unendliche ist, während doch gefordert war, daß für $|x| > a, |z| > b$ die Auslenkung v und nach diesem Ansatz auch $\frac{\partial \phi_m}{\partial y} / y=y_0$ verschwinden sollte. Die realen Verhältnisse eines Schiffsbodens dürften zwischen beidem liegen; einmal ist der Einfluß der Elastizität nicht abrupt am Rande eines vorgegebenen Plattenfeldes zu Ende, zum anderen ist der Vorgang nicht periodisch sondern klingt mit der Entfernung rasch ab. Dieses ist ein Hilfsmodell zur Ermittlung der Schwingungsgeschwindigkeit und des dadurch induzierten Drucks. Die induzierten Drücke sind für das ursprünglich gewählte Modell höher zu erwarten. Während jetzt verdrängtes Wasser die Möglichkeit hat, in ein sich entsprechend öffnendes Gebiet des Nachbarfeldes auszuweichen, ist das beim eigentlichen Modell nicht möglich. Physikalisch gesehen wird sich das Wasser aber diese Möglichkeit suchen und auch noch benachbarte Plattenfelder elastisch verformen. Folglich stellen sowohl das eine als auch das andere Modell nur eine Annäherung der Wirklichkeit dar. Eine Abschätzung für die Unterschiede wird im Anhang A dieser Arbeit gebracht.

Das Propellerdruckfeld auf der rechten Seite von 1.3) entwickelt man in ähnlicher Form wie den Lösungsansatz, nämlich:

$$- \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (\phi_I + \phi_{II}) / y=y_0 =$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} P_{mnk} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{ikN\omega t}$$

Diese Entwicklung für die rechte Seite und der Ansatz 1.9) werden in die Dgl. 1.3) eingesetzt. Das ergibt folgende Gleichung zur Bestimmung der unbekanntenen A_{mnk} .

$$\begin{aligned}
 1.10) \quad & \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} \left\{ \left(B \left(\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right)^2 - \rho_p \cdot h \cdot k^2 N^2 \omega^2 \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\rho_0 k^2 N^2 \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2}} \right\} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \\
 & + \frac{\rho_0 u_0 i k N \omega}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2}} \frac{m\pi}{2a} \cos \frac{m\pi(x+a)}{2a} \left. \right\} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{i k N z t} = \\
 & \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} P_{mnk} i k N \omega \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{i k N z t}
 \end{aligned}$$

Wäre die Anströmung $u_0=0$, so ließen sich durch Koeffizientenvergleich die unbekanntenen A_{mnk} sogleich bestimmen. Ist das nicht der Fall, läßt sich vorerst nur ein Koeffizientenvergleich in $\sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{i k N z t}$ durchführen.

Mit

$$1.11) \quad \omega_e^2 = \frac{B}{\rho_p \cdot h} \left(\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right)^2$$

den Eigenfrequenzen einer momentenfrei gelagerten Platte in Luft und nach Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\begin{aligned}
 1.12) \quad & \sum_{m=1}^{M_0} A_{mnk} \left(\rho_p \cdot h (\omega_e^2 - k^2 N^2 \omega^2) - \frac{\rho_0 k^2 N^2 \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2}} \right) \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \\
 & + \frac{\rho_0 u_0 i k N \omega}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2}} \frac{m\pi}{2a} \cos \frac{m\pi(x+a)}{2a} \left. \right\} = \sum_{m=1}^{M_0} i k N \omega P_{mnk} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a}
 \end{aligned}$$

Für eine weitere Auswertung ist dann auf 1.12) ein numerisches Näherungsverfahren anzuwenden, das Verfahren von Galerkin oder damit gleichwertig die Methode des kleinsten Fehlerquadrates. Das führt auf ein Gleichungssystem zur Bestimmung der A_{mnk} .

$$1.13) \left\{ \rho_p \cdot h (\omega_c^2 - k^2 N^2 \omega^2) - \frac{\rho_0 k^2 N^2 \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}} \right\} A_{mnk} + \sum_{m=1}^{M_0} \frac{\rho_0 u_0 i k N \omega}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}} \frac{m}{a} C_m^\mu A_{mnk} = i k N \omega p_{mnk}$$

Die Bedeutung dieser Rechnung liegt darin, daß in 1.12) ein Glied berücksichtigt wird, das dämpfend wirkt; im Falle der Resonanz wird die Amplitude nicht beliebig groß oder anders, das Gleichungssystem wird nicht singular.

Hier bedeuten die C_m^μ :

$$1.14) C_m^\mu = \frac{\pi}{2a} \int_{-a}^a \cos \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx$$

$$C_m^\mu = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{für } \mu = m \\ \text{und } \mu + m \\ \mu - m \end{array} \right\} = 2j \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_m^\mu = \frac{2\mu}{\mu^2 - m^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für } \mu + m \\ \mu - m \end{array} \right\} = 2j + 1$$

Um den physikalischen Hintergrund näher zu untersuchen, sei Gl. 1.12) nochmals, jetzt aber in dimensionsloser Form aufgeschrieben, und zwar wird bezogen auf den Außenradius R_0 des Propellers, die Spitzenumfangsgeschwindigkeit ωR_0 und auf die Dichte des Wassers ρ_0 .

$$1.15) \sum_{m=1}^{M_0} \frac{A_{mnk}}{\omega R_0} \left\{ \frac{\rho_p \cdot h}{\rho_0 \cdot R_0} \left(\left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - k^2 N^2 \right) - \frac{k^2 N^2}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{\frac{2a}{R_0}}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\frac{2b}{R_0}}\right)^2}} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} + \frac{i k N}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{\frac{2a}{R_0}}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\frac{2b}{R_0}}\right)^2}} \cdot \frac{u_0}{\omega R_0} \cdot \frac{m\pi}{\frac{2a}{R_0}} \cos \frac{m\pi(x+a)}{2a} \right\} = \sum_m i k N \frac{P_{mnk}}{\rho_0 \omega^2 R_0^2} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a}$$

Unter Vernachlässigung des Terms, der den Fortschrittsgrad $\lambda = \frac{u_0}{\omega R_0}$ des Propellers enthält und der, wie bereits erwähnt, als Dämpfung anzusprechen ist, läßt sich aus 1.13) eine Beziehung für den Fall, der quasi die Resonanz darstellt, bzw. für die Eigenfrequenz ω_{ew} der Platte, an die Wasser angrenzt, angeben.

$$1.16) \quad k^2 N^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{m\kappa}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\kappa}{2b}\right)^2} \rho_p \cdot h}} \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2$$

$$1.17) \quad \left(\frac{\omega_{ew}}{\omega_e}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{m\kappa}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\kappa}{2b}\right)^2} \rho_p \cdot h}}$$

Hier ist $\frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{m\kappa}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\kappa}{2b}\right)^2}}$ als hydrodynamische Masse pro Flächeneinheit ⁶⁾ anzusprechen. Man erkennt, daß durch das Wasser die Eigenfrequenzen zu niedrigeren Werten verschoben werden, aber abhängig von der Schwingungsform, am stärksten für die Grundform, weniger stark für die Oberschwingungsformen.

Was besagt das Dämpfungsglied? Die Wassermasse, die durch die Platte mit in Schwingung versetzt wird, verbleibt durch die Anströmung nicht am selben Ort; das induzierte Wecheldruckfeld schwimmt mit u_0 fort. Es ist zwar immer eine gleichgroße Wassermasse, die zum Mitschwingen angeregt wird, es ist aber nicht dieselbe. Die Periode, mit der die mitschwingende Wassermasse ausgetauscht wird, ist $T = \frac{2a}{u_0}$. Das ist gerade die Zeit, die ein Flüssigkeitsteilchen benötigt, um von der Vorderkante der Platte bis zur Hinterkante zu gelangen.

6) O.Grim: Über den Einfluß der mitschwingenden Wassermasse auf die Schwingungseigenschaften lokaler schwingungsfähiger Systeme
Schiff und Hafen 1953 S.538-540

Durch die Anströmung u_0 kommt es dadurch zu einer Phasendifferenz zwischen der Anregung einerseits und einem Anteil der Trägheitskraft andererseits. Für den Grenzfall $u_0 \rightarrow 0$ verschwindet diese Dämpfung. Man darf daraus aber nicht schließen, daß sie für den Propeller im Stand nicht vorhanden wäre. Sie ist lediglich nicht vorhanden in dieser linearisierten Theorie, in der das Quadrat der induzierten Geschwindigkeiten als klein gegenüber u_0^2 angenommen wurde. Aber das ist gerade bei hoher Belastung, d.h. kleinen Fortschrittsgraden, nicht mehr der Fall. Für den Propeller im Stand übernimmt die induzierte Axialgeschwindigkeit die Aufgabe von u_0 .

Für mäßige Belastungen kann man jedoch folgern: Der Fahrtzustand, also der Fortschrittsgrad wird geändert. Das kann durch Änderung der Anströmung u_0 geschehen. Dann ändert sich nur das Dämpfungsglied, das von Bedeutung nur für Resonanznähe ist. Weiter weg davon wird eine merkliche Änderung für die Lösung nicht eintreten. Anders ist es, wenn durch Änderung der Drehzahl der Abstand zwischen Erreger- und Eigenfrequenz kleiner oder auch größer wird. Da gewöhnlich die Erregung noch unter der niedrigsten Eigenfrequenz liegt, bedeutet eine Vergrößerung der Erregerfrequenz schon eine merkliche Erhöhung der Auslenkung.

Es soll noch kurz auf die Schwierigkeiten der Auswertung der Gl. 1.13) für den Quasiresonanzfall eingegangen werden. Dazu sind die Werte C_m'' in der Tabelle 1 zusammengestellt. In der Hauptdiagonalen sind die Vorfaktoren des A_{nk} -Gliedes aus Gl. 1.13) eingetragen zu denken. Für den Quasiresonanzfall ist aber gerade einer dieser Vorfaktoren Null. Man ersieht, daß für Resonanz dann eine recht hohe Anzahl Ansatzkoeffizienten m gewählt werden muß.

$\mu \backslash m$	1	2	3	4	5
1		$\frac{-2}{3}$		$\frac{-2}{15}$	
2	$\frac{4}{3}$		$\frac{-4}{5}$		$\frac{-4}{21}$
3		$\frac{6}{5}$		$\frac{-6}{7}$	
4	$\frac{8}{15}$		$\frac{8}{7}$		$\frac{-8}{9}$
5		$\frac{10}{21}$		$\frac{10}{9}$	
6	$\frac{12}{35}$		$\frac{12}{27}$		$\frac{12}{11}$
7		$\frac{14}{45}$		$\frac{14}{33}$	
8	$\frac{16}{63}$		$\frac{16}{55}$		$\frac{16}{39}$
9		$\frac{18}{77}$		$\frac{18}{65}$	
10	$\frac{20}{99}$		$\frac{20}{91}$		$\frac{20}{75}$
11		$\frac{22}{117}$		$\frac{22}{105}$	
12	$\frac{24}{143}$		$\frac{24}{135}$		$\frac{24}{119}$
13		$\frac{26}{165}$		$\frac{26}{153}$	
14	$\frac{28}{195}$		$\frac{28}{187}$		$\frac{28}{171}$
15		$\frac{30}{221}$		$\frac{30}{209}$	

Tabelle 1

Die numerischen Rechnungen ergaben, daß für Resonanz in der Grundform $M_0=11$ Reihenglieder zu wählen waren, bevor der errechnete Wert als gesichert angesehen werden durfte. Das läßt sich nach Kenntnis der Tabelle 1 auch gar nicht anders erwarten, da die Ansatzkoeffizienten nicht voneinander unabhängig, und die C_m^{μ} nur langsam kleiner werden. Für Rechnungen außerhalb der Resonanz waren die Ergebnisse völlig stabil, wenn $M_0=5$ gewählt wurde.

Die Schwingungsgeschwindigkeit der Platte ist somit bekannt. Die Auslenkung selbst erhält man, indem man noch durch $ikN\omega$ dividiert.

Die jetzt folgenden Überlegungen über die Abstrahlung ins Fernfeld setzen die Kenntnis der Geschwindigkeit voraus. Diese muß jedoch nicht notwendigerweise durch das instationäre Propellerdruckfeld verursacht sein, es ist vielmehr jede Form der Anregung denkbar. Bedingung ist lediglich, daß die Geschwindigkeit, mit der die Platte schwingt, bekannt ist.

2. Das auf Grund der Elastizität abgestrahlte Fernfeld

Um die Abstrahlung ins Fernfeld zu ermitteln, soll von der Kirchhoff'schen Wellenformel ausgegangen werden. Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$2.1) \quad \Delta \phi^* - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^{*2}} = 0$$

ist für ein Raumgebiet (G) mit der Oberfläche (O) nach der Kirchhoff'schen Formel ⁷⁾ gegeben:

$$2.2) \quad \phi^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(O)} \left\{ \frac{1}{D^*} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \right] - [\phi^*] \frac{\partial}{\partial n^*} \frac{1}{D^*} + \frac{1}{D^*} \frac{\partial D^*}{\partial n^*} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \right] \right\} dO$$

Die eckigen Klammern sollen andeuten, daß die vorgegebenen Randwerte zur retardierten Zeit ($t^* - D^*$) zu nehmen sind. n^* ist die Normalenrichtung von (O). Im vorliegenden Fall ist ein Raumgebiet gegeben, das am Ort $y = y_0$ durch die x, z-Ebene begrenzt wird, sonst aber den ganzen unendlichen Raum $y < y_0$ umfaßt. Aus diesem Grunde ist 2.2) in kartesischen Koordinaten anzuschreiben.

$$2.3) \quad \phi^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(O)} \left\{ \frac{1}{D^*} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial \bar{\Delta}_i} \right] - [\phi^*] \frac{\partial}{\partial \bar{\Delta}_i} \frac{1}{D^*} + \frac{1}{D^*} \frac{\partial D^*}{\partial \bar{\Delta}_i} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \right] \right\} n_i^* dS$$

Dabei bedeuten:

$$\bar{\Delta}_i^* = (\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$$

$$D^* = \sqrt{(x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2 + (z^* - \zeta^*)^2}$$

$$n_i^* dS = (d\eta^* d\zeta^*, d\zeta^* d\xi^*, d\xi^* d\eta^*)$$

7) A.N. Tychomoff, A.A. Samarski:
Differentialgleichungen der mathematischen Physik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1959 S.400

Ist eine Translationsgeschwindigkeit, wie hier die Anströmgeschwindigkeit u_0 zum Propeller, vorhanden, so ist eine Beziehung zwischen den gesterntten Größen, die u_0 implizit bereits enthalten sollen, und den ungesterntten herzuleiten.

Mit der Substitution

$$x^* = x; \quad y^* = \beta y; \quad z^* = \beta z; \quad t^* = \beta^2 c_0 t + \frac{u_0}{c_0} x; \quad \beta^2 = 1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}$$

kann man schreiben:

$$2.4) \quad \phi^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \phi(x, y, z, t) = \phi\left(x^*, \frac{y^*}{\beta}, \frac{z^*}{\beta}, \frac{t^*}{\beta^2 c_0} - \frac{u_0 x^*}{\beta^2 c_0^2}\right)$$

Für die benötigten Ableitungen bekommt man mit 2.4):

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{u_0}{\beta^2 c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}; \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} = \frac{\partial \phi}{\beta \partial y}; \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = \frac{\partial \phi}{\beta \partial z}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\beta^2 c_0} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Damit nimmt Gleichung 2.3) die Form an: 8)

$$2.5) \quad \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_0} \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] - [\phi] \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{D} - \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \left(\frac{u_0}{\beta^2 c_0^2} + \frac{x - \xi}{\beta^2 c_0 D} \right) \right\} \beta^2 d\eta d\xi \Big|_{\xi = \pm \infty}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] - [\phi] \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{D} - \frac{1}{D^2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \frac{y - \eta}{c_0} \right\} d\xi d\eta \Big|_{\eta = -\infty}^{y_0}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] - [\phi] \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{D} - \frac{1}{D^2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \frac{z - \xi}{c_0} \right\} d\xi d\eta \Big|_{\xi = \pm \infty}$$

8) H.Viviand: L'Équation fondamentale de la théorie du bruit aérodynamique dans le cas de surfaces en mouvement de translation uniforme
Journal de Mécanique, Vol.9, No2, Juin 1970
S.333

Hier bedeutet: $[\phi] = \phi(\xi, \eta, \zeta, t + \frac{u_0(x-\xi)}{\beta^2 c_0^2} - \frac{D}{\beta c_0})$

$$D = \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2 + \beta^2(z-\zeta)^2}$$

Man darf sicher davon ausgehen, daß die Integranden insbesondere $[\phi], [\frac{\partial \phi}{\partial \xi}], [\frac{\partial \phi}{\partial t}]$ in 2.5) hinreichend konvergieren, d.h. die unendlichen Grenzen werden durch hinreichend große endliche ersetzt; so verschwinden die Integrale, die über Flächen im Unendlichen zu erstrecken sind, weil dann der Abstand D beliebig groß gemacht werden kann.

Aus 2.5) soll nun das kompressible Potential ϕ_{III} hergeleitet werden.

$$2.6) \quad \phi_{\text{III}}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial \eta} \right] - \frac{\beta^2(y-\eta)}{D^3} [\phi_{\text{III}}] - \frac{y-\eta}{c_0 D^2} \left[\frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial t} \right] \right\} d\xi d\zeta$$

$\eta = y_0$

Da erzwungene Schwingungen betrachtet werden, und zwar mit den Frequenzen $kN\omega$, soll statt ϕ_{III}^* geschrieben werden:

$$\phi_{\text{III}}^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \sum_{k=-k_0}^{k_0} \varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*) e^{ikN\frac{\omega}{c_0} t^*}$$

Damit wird aus der Wellengleichung 2.1)

$$2.1a) \quad \Delta \varphi_{\text{III}k}^* + \frac{k^2 N^2 \omega^2}{c_0^2} \varphi_{\text{III}k}^* = 0$$

und aus der Kirchhoff'schen Formel 2.2)

$$2.2a) \quad \varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(O)} \left\{ \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} D^*}}{D^*} \frac{\partial \varphi_{\text{III}k}^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)}{\partial n^*} - \varphi_{\text{III}k}^* \frac{\partial}{\partial n^*} \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} D^*}}{D^*} \right\} dO$$

bzw. aus der für meinen speziellen Fall des Halbraums angeschriebenen Formel 2.6)

$$2.6a) \quad \varphi_{IIIk}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-ikN \frac{\omega}{\beta^2 c_0} (D - \frac{u_0(x-\xi)}{c_0})}}{D} \frac{\partial \varphi_{IIIk}}{\partial \eta} - \varphi_{IIIk} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{e^{-ikN \frac{\omega}{\beta^2 c_0} (D - \frac{u_0(x-\xi)}{c_0})}}{D} \right\} \Big|_{\eta=y_0} d\xi d\zeta$$

jeweils eine Beziehung für die Zeitamplituden $\varphi_{IIIk}(x,y,z)$. Aus der in Abschnitt 1 durchgeführten Rechnung sind die Randwerte $\frac{\partial \varphi_{IIIk}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y_0} = \dot{U}_k(\xi, \zeta)$ für den elastischen Ausschnitt $|x| \leq a, |z| \leq b$ bekannt, im übrigen sind sie gleich Null, aus der Forderung, daß die Platte sonst starr sein soll. Damit komme ich für die Abstrahlung auf das ursprünglich gewählte Modell zurück. Was noch fehlt, sind die Randwerte $\varphi_{IIIk}(\xi, y_0, \zeta)$.

Für die weiteren Überlegungen wird die zweite Green'sche Formel benutzt.

$$2.7) \quad \iiint_{(V)} (u^* \Delta \varphi_{IIIk}^* - \varphi_{IIIk}^* \Delta u^*) dV = \iint_{(O)} (u^* \frac{\partial \varphi_{IIIk}^*}{\partial n^*} - \varphi_{IIIk}^* \frac{\partial u^*}{\partial n^*}) dO$$

Mit ihrer Hilfe soll 2.2a), respektive 2.6a) so umgeformt werden, daß allein die Kenntnis der Normalableitung der Randwerte genügt, um die gesuchte Funktion $\varphi_{IIIk}^*(x,y,z)$ zu bestimmen. Dieses nennt man in der Potentialtheorie die 2. Randwertaufgabe oder Neumann'sches Problem. 9)

Sind sowohl u^* als auch φ_{IIIk}^* Lösungen der Dgl. 2.1a), so erhält man:

9) E. Martensen: Potentialtheorie
B.G. Teubner, Stuttgart 1968 S. 226

$$2.8) \iiint_{(V)} \left(-u^* \frac{k^2 N^2 \omega^2}{c_0^2} \varphi_{\text{III}k}^* + \varphi_{\text{III}k}^* \frac{k^2 N^2 \omega^2}{c_0^2} u^* \right) dV =$$

$$\iint_{(O)} \left(u^* \frac{\partial \varphi_{\text{III}k}^*}{\partial n^*} - \varphi_{\text{III}k}^* \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \right) dO = 0$$

2.8) werde zu 2.2a) hinzuaddiert (n^* bereits η^* gesetzt).

$$2.9) \varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \left(G^* \frac{\partial \varphi_{\text{III}k}^*}{\partial \eta^*} - \varphi_{\text{III}k}^* \frac{\partial G^*}{\partial \eta^*} \right) \Big|_{\eta^*=y_0^*} d\xi^* d\xi^*$$

mit
$$G^* = \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} D^*}}{D^*} + u^*$$

Jetzt ist eine Funktion u^* als Lösung der Dgl. 2.2a) zu finden, sodaß $\frac{\partial G^*}{\partial \eta^*} = 0$ auf der Randfläche $\eta^* = y_0^*$.

Für den Halbraum $y^* < y_0^*$ ist das aber gerade der Fall, wenn

$$u^* = \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} \sqrt{(x^* - \xi^*)^2 + (2y_0^* - y^* - \eta^*)^2 + (z^* - \xi^*)^2}}}{\sqrt{(x^* - \xi^*)^2 + (2y_0^* - y^* - \eta^*)^2 + (z^* - \xi^*)^2}}$$

gewählt wird. Das bedeutet, der zweite Integralterm in 2.9) verschwindet, sodaß die gesuchte Funktion allein durch

$$2.10) \varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} D^*}}{D^*} \frac{\partial \varphi_{\text{III}k}^*}{\partial \eta^*} \Big|_{\eta^*=y_0^*} d\xi^* d\xi^*$$

bestimmt ist. In ungestörten Variablen und unter Berücksichtigung, daß Randwerte nur im Bereich $|x| \leq a$, $|z| \leq b$ von Null verschieden, nämlich $\dot{v}_k(\xi, \xi)$, sind, heißt die Formel, aus der die Abstrahlung ins Fernfeld zu berechnen ist: 10)

10) L.Cremer, M.Heckl: Körperschall
Springer Verlag
Berlin Heidelberg New York 1967 S.446

$$2.11) \quad \varphi_{mk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{\beta c_0} (D - \frac{u_0(x-\xi)}{c_0})}}{D} \dot{u}_k(\xi, \xi) \Big|_{z=y_0} d\xi d\xi$$

Damit läßt sich der Schalldruck berechnen aus:

$$2.12) \quad P_{mk} = -\rho_0 (ikN\omega \varphi_{mk} + u_0 \frac{\partial \varphi_{mk}}{\partial x})$$

Die Bestimmung der konjugiert komplexen Ausdrücke erfolgt ebenso.

Für große Aufpunktsabstände $r = \sqrt{x^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \approx D$ erkennt man, daß die Differentiation nach x , wie sie der zweite Ausdruck in 2.12) für den Schalldruck fordert, nur Terme ergibt, die entweder von höherer Ordnung verschwinden oder proportional $\frac{1}{c}$ sind. Den Druck erhält man also dann schon aus:

$$P_{mk} \approx -\rho_0 ikN\omega \varphi_{mk}$$

Für $D \approx r$ ist dies aber ein Ausdruck, der nur von r und keiner weiteren Aufpunktskoordinate und zwar $\sim \frac{1}{r}$ abhängt. Für das Fernfeld darf also vermutet werden, daß der Schalldruck auf einer großen Kugel mit dem Radius r konstant ist.

3. Die elastische Platte umgeben von der Wasseroberfläche

Für den Fall, daß die elastische Platte nicht von einem starren Rand umgeben ist, sondern von der freien Wasseroberfläche, soll jetzt die Theorie angegeben werden. Während bisher für das Propellerpotential ϕ_I und das gespiegelte Potential ϕ_{II} galt, daß am Ort der Platte y_0 die Normalgeschwindigkeit zur Platte verschwinden sollte, ist jetzt gefordert, daß dort allein der Druck p_0 herrscht, das bedeutet, die von ϕ_I und ϕ_{II} induzierten Drücke heben sich gerade auf. Die Wirkung der Schwerkraft ist dabei allerdings nicht berücksichtigt.

Um diese neue Randbedingung zu erfüllen, ist es lediglich nötig, das bisherige Potential ϕ_{II} mit einem anderen Vorzeichen zu versehen.

Während sich früher einstellte, daß der induzierte Druck an der starren Platte betragsmäßig doppelt so groß war wie im freien Flüssigkeitsraum, ergibt sich hier ähnlich, daß die induzierte Geschwindigkeit zu verdoppeln ist. Die Dgl. der Biegung der Platte lautet dann:

$$3.1) \quad B(\Delta\Delta v) + \rho \cdot h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{III} \Big|_{y=y_0}$$

Dabei ist die neue Randbedingung, daß von ϕ_I und ϕ_{II} am Ort y_0 keine Drücke induziert werden, bereits berücksichtigt.

Im Bereich der Platte muß jetzt gelten, daß die elastische Auslenkungsgeschwindigkeit \dot{v} gleich der Ableitung der Summe aller drei Potentiale ist.

$$3.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v} = \frac{\partial}{\partial y} (\phi_I + \phi_{II} + \phi_{III}) \Big|_{y=y_0}$$

Wird auch hier 3.1) nach der Zeit differenziert und dabei 3.2) eingesetzt, so erhält man wiederum eine Dgl. für das unbekannte Potential ϕ_{II} .

$$3.3) \quad B \left(\Delta \Delta \left(\frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \right) \right) + \rho_p \cdot \gamma \frac{\partial^3 \phi_{II}}{\partial y \partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + \rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t \partial x} =$$

$$-B \left(\Delta \Delta \frac{\partial (\phi_I + \phi_{II})}{\partial y} \right) - \rho_p \cdot \gamma \left(\frac{\partial^3 (\phi_I + \phi_{II})}{\partial y \partial t^2} \right) \Big|_{y=y_0}$$

Dadurch, daß im Plattenbereich die bei der Spiegelung zunächst noch zugelassene Normalgeschwindigkeit in der Ebene y_0 entsprechend dem elastischen Verhalten der Platte unterdrückt wird, wird das auf der rechten Seite von 3.3) stehende anregende Druckfeld induziert.

Die Dgl. 3.3) unterscheidet sich von der früheren 1.3) nur durch die andere Art der Anregung.

Aus 3.3) kann somit genau wie vorher das inkompressible Potential ϕ_{II} bestimmt werden.

Das abgestrahlte Fernfeld ist ebenfalls aus der Kirchhoff'schen Formel und zwar in der Form der Gl. 2.9) zu bestimmen.

$$2.9) \quad \varphi_{IIIk}^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(G^* \frac{\partial \varphi_{IIIk}^*}{\partial \eta^*} - \varphi_{IIIk}^* \frac{\partial G^*}{\partial \eta^*} \right) \Big|_{\eta^*=y_0^*} d\xi^* d\zeta^*$$

mit
$$G^* = e^{\frac{-ikN\omega}{c_0} D^*} + u^*$$

Die Randbedingung der freien Wasseroberfläche lautet:

$$\frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} = 0$$

bzw.

$$ikN\omega \varphi_{IIIk}^* + u_0 \frac{\partial \varphi_{IIIk}^*}{\partial x^*} = 0$$

Das Problem, das sich jetzt stellt, ist: Die Randwerte $\varphi_{\text{III}k}^*$ sind überall bekannt, für $|x| \leq a$, $|z| \leq b$ aus der Nahfeldrechnung, im übrigen gleich Null aus der Randbedingung. Wie muß die Funktion u^* in diesem Fall gewählt werden, sodaß G^* auf dem Rand verschwindet, also allein die Kenntnis der Randwerte $\varphi_{\text{III}k}^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ genügt, um $\varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*)$ zu bestimmen. Eine derartige Aufgabe ist aus der Potentialtheorie als erste Randwertaufgabe bzw. als Dirichlet'sches Problem ¹¹⁾ bekannt.

Die Lösung für den Halbraum liefert:

$$u^* = - \frac{e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} \sqrt{(x^*-\xi^*)^2 + (2y^*-y^*-\eta^*)^2 + (z^*-\zeta^*)^2}}}{\sqrt{(x^*-\xi^*)^2 + (2y^*-y^*-\eta^*)^2 + (z^*-\zeta^*)^2}}$$

Für $\eta^* = y_0^*$, also auf dem Rand, verschwindet G^* wie es gefordert war.

Damit kann $\varphi_{\text{III}k}^*$ gewonnen werden aus:

$$3.4) \quad \varphi_{\text{III}k}^*(x^*, y^*, z^*) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y^* - y_0^*}{D^{*2}} \left(\frac{1}{D^*} + ikN\frac{\omega}{c_0} \right) \varphi_{\text{III}k}^*(\xi^*, y_0^*, \zeta^*) \cdot e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} D^*} \Big|_{\eta^*=y_0^*} d\xi^* d\zeta^*$$

bzw.

$$3.5) \quad \varphi_{\text{III}k}^*(x, y, z) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y-y_0}{D^2} \left(\frac{\beta^2}{D} + ikN\frac{\omega}{c_0} \right) \varphi_{\text{III}k}^*(\xi, y_0, \zeta) \cdot e^{-ikN\frac{\omega}{c_0} \left(D - \frac{4\beta^2(x-\xi)}{c_0} \right)} \Big|_{\eta=y_0} d\xi d\zeta$$

Diese Formeln liefern für den Rand gerade die vorgeschriebenen Randwerte, im Bereich des elastischen Ausschnitts $\varphi_{\text{III}k}^*(\xi, y_0, \zeta)$, sonst den Wert Null, weil dann die Singularität nicht enthalten ist. Aus diesem Grunde verschwindet auch die Ableitung nach x , wie es die Randbedingung verlangt.

Gl. 3.5) stellt das Potential einer Dipolbelegung dar, zum Unterschied von Gl. 2.11), die ihrem Charakter nach das Potential einer Quell-Senkenverteilung ist.

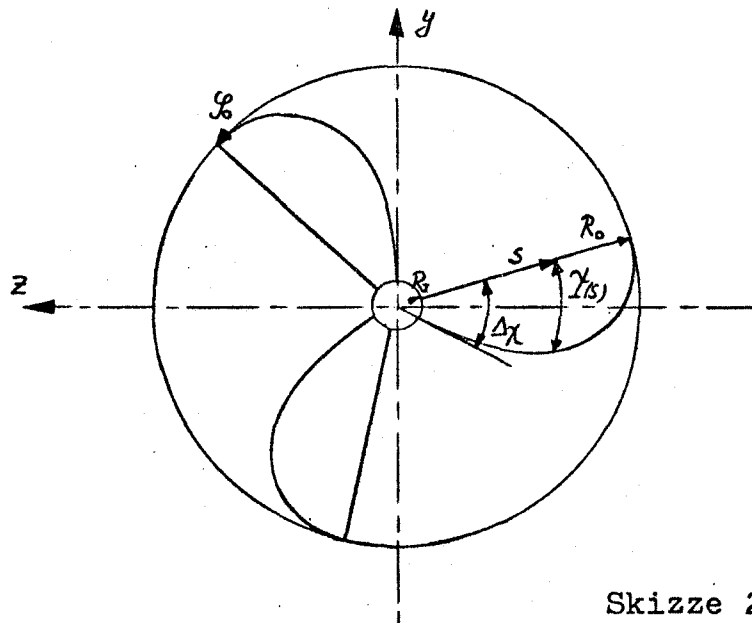
-
- 11) O.D.Kellog: Foundations of Potential Theory
Dover Publications, Inc.
New York 1959 S.286

Die Literaturangaben 7), 9) und 11) sind als eine Einheit zu verstehen. Die hier angesprochenen Probleme sind in allen drei Werken behandelt.

4. Zur Berechnung des von einem Schraubenpropeller induzierten instationären Druckfeldes

Während bei der herkömmlichen Traglinientheorie ¹²⁾ der tragende Wirbel radial nach außen gerichtet ist, soll hier eine Theorie hergeleitet werden, die es gestattet, den tragenden Wirbel beliebig in die y, z -Ebene zu legen. Als Spezialfall ist die bekannte Traglinientheorie darin enthalten.

Die geometrische Anordnung:



Skizze 2

Die tragende Linie, die sich bisher momentan am Ort P_0 befindet, soll jetzt am Ort $P_0 + \gamma(s)$ angeordnet sein. Ziel dieser Anordnung ist es, die Amplituden des instationären Drucks dadurch zu verringern, daß die tragenden Wirbel nicht mehr an N Punkten auf dem Umfang angeordnet sind, sondern mehr über den Umfang verteilt werden. Wird etwa $\Delta\chi = \frac{2\pi}{N}$ gewählt, so sind die tragenden Wirbel gerade über den ganzen Umfang angeordnet.

12) W.H.Isay: Propellertheorie Hydrodynamische Probleme Springer Verlag 1964 Berlin Göttingen Heidelberg S.1-9

Für die Geometrie der tragenden Wirbel kann somit geschrieben werden:

$$4.1) \quad \vec{H}_T = s \cdot \cos\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s)\right) \vec{H}_y + s \cdot \sin\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s)\right) \vec{H}_z$$

Die von den tragenden Wirbeln aller N Flügel induzierten Geschwindigkeiten \vec{H}_T erhält man aus dem Biot-Savart'schen Gesetz.

$$4.2) \quad \vec{H}_T = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_2}^{R_0} \Gamma\left(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) \frac{(\vec{H} - \vec{H}_T) \times d\vec{s}}{|\vec{H} - \vec{H}_T|^3}$$

Mit

$$4.3) \quad d\vec{s} = \frac{\partial \vec{H}_T}{\partial s} ds$$

für die Richtung der tragenden Wirbel und

$$4.4) \quad \vec{H} = x \cdot \vec{H}_x + y \cdot \vec{H}_y + z \cdot \vec{H}_z$$

für den Aufpunktvektor bestimmt man aus 4.2) die induzierte Geschwindigkeit.

$$4.5) \quad \vec{H}_T = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_2}^{R_0} \frac{\Gamma\left(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right)}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right)}} ds$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \left[r \sin\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) - rs \cos\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) \gamma'(s) + s^2 \gamma'(s) \right] \vec{H}_x \right. \\ & - x \left[\sin\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) - s \cdot \cos\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) \cdot \gamma'(s) \right] \vec{H}_y \\ & \left. - x \left[\cos\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) + s \cdot \sin\left(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)\right) \cdot \gamma'(s) \right] \vec{H}_z \right\} ds \end{aligned}$$

Die Flügelzirkulation ändert sich in radialer Richtung; so ist sie an der Nabe und am Außenradius gleich Null. Arbeitet der Propeller in einem Nachstromfeld eines Schiffes, so ist Γ auch von der momentanen Winkelstellung abhängig. Nach den Helmholtz-Thomson'schen Erhaltungssätzen für Γ - diese besagen, daß Γ sowohl räumlich als auch zeitlich konstant ist - bedeutet das das Auftreten freier Querwirbel der Stärke

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial s} ds$$

und freier Längswirbel

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} dt = \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} d\gamma$$

(Hier wechselt das Vorzeichen deshalb, weil der Propeller in negativer Winkelrichtung dreht.)

Diese freien Wirbel schwimmen entsprechend dem vorhandenen Strömungsfeld fort und bleiben unter der Voraussetzung einer idealen Flüssigkeit unverändert erhalten.

Für die Steigung dieser Schraubenflächen wird gesetzt:

$$\tan \beta = \frac{r_0}{s}$$

Dann läßt sich für die Geometrie der freien Wirbelflächen schreiben:

$$4.6) \quad N_F = r_0 \gamma n_x + s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) n_y + s \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) n_z$$

Die Achsen der freien Querwirbel sind diesen Schraubenflächen tangential. Ihre Richtung erhält man aus

$$4.7) \quad d\delta_Q = \frac{\partial N_F}{\partial \gamma} d\gamma = \left[r_0 n_x - s \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) n_y + s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) n_z \right] d\gamma$$

Die freien Längswirbel sind den tragenden Wirbeln parallel. Ihre Richtung ist demnach:

$$4.8) \quad d\delta_L = \frac{\partial N_F}{\partial s} ds = \left[\left\{ \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) - s \cdot \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) \cdot \gamma'(s) \right\} n_y + \left\{ \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) + s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma(s) + \gamma) \cdot \gamma'(s) \right\} n_z \right] ds$$

Die induzierten Geschwindigkeiten erhält man wieder aus dem Biot-Savart'schen Gesetz.

$$4.9) \quad \mathcal{H}_Q = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_1}^{R_0} \int_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\partial T(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma)}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{(x-k_0\gamma)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Theta}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[r \cos \Theta - s \right] \mathcal{H}_x + \left[k_0 \sin \Theta - (x-k_0\gamma) \cos \Theta \right] \mathcal{H}_r \\ & + \left[k_0 \cos \Theta - k_0 \frac{r}{s} + (x-k_0\gamma) \sin \Theta \right] \mathcal{H}_\varphi \end{aligned} \right\} s ds d\gamma$$

$$4.10) \quad \mathcal{H}_L = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_1}^{R_0} \int_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\partial T(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma)}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{(x-k_0\gamma)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Theta}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[r \sin \Theta - rs \cos \Theta \cdot Y'(s) + s^2 Y'(s) \right] \mathcal{H}_x \\ & - \left[(x-k_0\gamma) \sin \Theta - (x-k_0\gamma) \cdot s \cdot \cos \Theta Y'(s) \right] \mathcal{H}_r \\ & - \left[(x-k_0\gamma) \cos \Theta + (x-k_0\gamma) \cdot s \cdot \sin \Theta Y'(s) \right] \mathcal{H}_\varphi \end{aligned} \right\} ds d\gamma$$

Sind die Geschwindigkeiten \mathcal{H}_r , \mathcal{H}_φ und \mathcal{H}_z bekannt, so gilt es das zugehörige Potential zu finden, wobei gilt $\mathcal{H} = \text{grad } \phi$.

Hier lautet es:

$$4.11) \quad \phi = - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_1}^{R_0} \int_{\gamma=0}^{\infty} T(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma) \cdot \frac{(x-k_0\gamma - \frac{k_0 r}{s} \sin \Theta - k_0 (s-r \cos \Theta) \cdot Y'(s))}{\sqrt{(x-k_0\gamma)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Theta}} s ds d\gamma$$

$$\Theta = \varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - Y'(s) - \gamma$$

Das Potential 4.11) läßt sich außerdem schreiben:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_1}^{R_0} \int_{\gamma=0}^{\infty} \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \gamma) \left(-s \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{k_0}{s} + k_0 s \gamma'(s)^2 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + k_0 s \gamma'(s) \frac{\partial}{\partial s} \right) \cdot \frac{ds d\gamma}{\sqrt{(x-k_0\gamma)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}}$$

Aus dieser Darstellung kann man ablesen, daß ϕ auch der Kontinuitätsbedingung $\Delta\phi=0$ genügt, da die dort geforderten Differentiationen auf die Grundlösung der Laplace Gleichung anzuwenden sind. Dafür ist der davorstehende Faktor eine Konstante. Die in 4.9) und 4.10) angegebenen Geschwindigkeiten lassen sich durch partielle Integration umformen; dabei ist zu berücksichtigen, daß die Zirkulation

$$4.12) \quad \Gamma(R_1, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) - \Gamma(R_0, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) = 0$$

ist. Summiert man anschließend die Geschwindigkeiten aller drei Anteile auf, so erhält man für jede Komponente das gleiche Ergebnis, wie es die Ableitung des Potentials 4.11) für die entsprechende Komponente liefern würde.

Das Druckfeld ist aus der linearisierten Bernoulli Gleichung

$$4.13) \quad \frac{P-P_0}{\rho} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi$$

zu bestimmen. Ist der Propeller nur schwach belastet, so darf $k_0 = \frac{u_0}{\omega}$ gesetzt werden. Mit der Substitution

$$k_0 \gamma = x + \xi; \quad k_0 d\gamma = d\xi$$

erhält man:

$$4.14) \quad \frac{P_{\phi} - P_0}{\rho \omega^2 R_0^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_I}^{R_0} \frac{T(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N})}{\omega R_0^2} ds$$

$$\frac{s x - k_0 r \sin(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s)) - k_0 s (s - r \cos(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s))) \gamma'(s)}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma(s))}^3} ds$$

Durch das bisher benutzte Wirbelmodell ist nur der Einfluß des Drucksprungs an einem sehr dünnen Propellerflügel erfaßt worden. Noch nicht berücksichtigt ist der Einfluß der endlichen Dicke des Flügelblatts. Dazu ist es nötig, den Propellerflügel zusätzlich mit einer Quell-Senkenverteilung zu belegen.

Das Geschwindigkeitspotential der Quell-Senkenverteilung zur Darstellung der endlichen Dicke des Blattes ergibt sich aus der Verallgemeinerung des Potentials einer Punktquelle.

$$4.15) \quad \phi_q = - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_I}^{R_0} \int_{\chi=\chi_v(s)}^{\chi_h(s)} \frac{q(s, \chi) \sqrt{s^2 + k_1^2} d\chi ds}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma)}}$$

- χ Winkelordinate in Umfangsrichtung
- χ_v Vorderkante
- χ_h Hinterkante des Propellerblattes
- k_1 geometrische Steigung der Profilsehne

Die Quell-Senkenverteilung muß die Schließungsbedingung erfüllen.

$$4.16) \quad \int_{\chi=\chi_v}^{\chi_h} q(s, \chi) = 0$$

Die Quell-Senkenverteilung $q(s, \chi)$ wird in einer trigonometrischen Reihe dargestellt, bei der die Schließungsbedingung von vorneherein erfüllt ist.

13)

13) R.Armonat: Untersuchung der Druckverteilung eines Propellers unter Berücksichtigung grenschichtbedingter Maßstabeffekte Schiffstechnik Bd.16, 1969 S.41-54

$$4.17) \quad q(s(\vartheta), \chi(\tau)) = \frac{2\omega R_0}{\sqrt{1 + (\frac{R_0}{s})^2}} \left(\frac{B_0}{\chi_w(s) - \chi_v(s)} (\cot \frac{\tau}{2} - 2 \sin \tau) \right. \\ \left. + \frac{B_1}{\chi_w(s) - \chi_v(s)} (\tan \frac{\tau}{2} - 2 \sin \tau) \right) \left(1 + \frac{1 - \frac{D_a}{D_i}}{1 + \frac{D_a}{D_i}} \cos \vartheta \right)$$

Hier sind folgende Substitutionen benutzt:

$$4.18) \quad s = \frac{R_0 + R_i}{2} - \frac{R_0 - R_i}{2} \cos \vartheta \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\chi = \frac{\chi_w(s) + \chi_v(s)}{2} - \frac{\chi_w(s) - \chi_v(s)}{2} \cos \tau \quad 0 \leq \tau \leq \pi$$

D_a/D_i sind Konstante.

Die Koeffizienten B_0 und B_1 sind bei vorgegebener Dickenverteilung $D(s, \chi)$ aus der Beziehung

$$4.19) \quad \frac{q(s, \chi)}{\sqrt{u_0^2 + \omega^2 s^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + k_1^2}} \cdot \frac{\partial D(s, \chi)}{\partial \chi}$$

zu bestimmen.

Das Druckfeld auf Grund der Dicke erhält man:

$$4.20) \quad \frac{P_2 - P_0}{\frac{P_0}{2} \omega^2 R_0^2} = - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s=R_i}^{R_0} \int_{\chi=\chi_v(s)}^{\chi_w(s)} \frac{q(s, \chi)}{\omega R_0} \\ \frac{\frac{s}{R_0} \tau \sin(\vartheta - \vartheta_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma) + \frac{u_0}{\omega R_0} (x - k_1 \chi)}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + \tau^2 + s^2 - 2\tau s \cos(\vartheta - \vartheta_0 - \frac{2\pi n}{N} - \gamma)}}^{1/3} d\chi ds$$

5. Die orthotrope Platte

Die Außenhaut eines Schiffes ist verstärkt durch Spanten und Rahmenkonstruktionen. Gerade im Hinterschiff im Propellerbereich trifft man auf zusätzliche Versteifungen. Deshalb können die hier angestellten Überlegungen nicht für die isotrope Platte durchgeführt werden; vielmehr ist es nötig, um die realen Verhältnisse zu betrachten, die orthotrope Platte zu behandeln.

Die Dgl. für die Durchbiegung einer Platte unter einer Belastung senkrecht zur Plattenebene lautet in allgemeiner Form: ¹⁴⁾

$$5.1) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho_T \cdot \eta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, z, t)$$

mit

$$D_1 = \frac{(EJ)_x}{1 - \nu_x \nu_z}$$

$$D_2 = \frac{(EJ)_z}{1 - \nu_x \nu_z}$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \left(\nu_x \frac{(EJ)_z}{1 - \nu_x \nu_z} + \nu_z \frac{(EJ)_x}{1 - \nu_x \nu_z} \right) + 2 (GI)_{xz}$$

Für die isotrope Platte gilt $D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Bei der orthotropen Platte wären $(EJ)_x$, $(EJ)_z$, $(GI)_{xz}$, ν_x , ν_z experimentell zu bestimmen.

Es ist nun üblich, die aus den Versteifungen herührende zusätzliche Biegesteifigkeit zu "verschmieren", d.h. man setzt in Richtung der aufgebrauchten Steife an:

$$(EI)_z = a_z \frac{Eh^3}{12}$$

Hier ist a_z das Verhältnis von Steifigkeit des Plattenstreifens plus Steife zu Plattenstreifen allein.

14) R.F.S.Hearmon: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity
Oxford University Press 1961 S.94

Dann ist für D_2 zu schreiben:

$$D_2 = a \frac{Eh^3}{z/2(1-\nu_x\nu_z)}$$

Nach Timoshenko ¹⁵⁾ hat sich herausgestellt, daß bei ausgesteiften Plattenfeldern die Querkontraktionszahlen ν_x, ν_z praktisch gleich Null sind. Eine ähnliche Aussage ist auch einer neueren amerikanischen Arbeit ¹⁶⁾ zu entnehmen.

Statt 5.1) soll geschrieben werden:

$$5.2) \quad \frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + a_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) + \rho_p \cdot h^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P(x, z, t)$$

Zur Erläuterung von 5.2) ist zu sagen: Da a_z immer recht groß zu erwarten ist, bekommt der entsprechende Summand in 5.2) entscheidenden Einfluß. Das bedeutet, daß die Durchbiegung im wesentlichen durch die Biegung der Steife, die im Vergleich zur Platte bedeutend steifer ist, bestimmt wird. Ungenauigkeiten bei den anderen Termen haben nur geringen Einfluß, da diese ersten Terme sowieso schon klein gegenüber dem mit a_z sind.

Die Eigenfrequenz einer momentenfrei aufgelagerten Platte mit Steifen läßt sich abweichend von 1.11) berechnen:

$$5.3) \quad \omega_c^2 = \frac{Eh^3}{12\rho_p \cdot h^*} \left\{ \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + a_z \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 \right\}$$

h^* ist eine fiktive Dicke, die so zu bestimmen ist, daß die Masse der Platte mit Steifen pro Flächeneinheit gleich $\rho_p \cdot h^*$ ist.

15) S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability
Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
New York and London 1936 S. 381

16) H.A. Kamel, W. Birchler, D. Liu, I.W. McKinley, W.R. Reid:
An Automated Approach to Ship Structure
Analysis
The Society of Naval Architects and
Marine Engineers New York 1969 S. 238

Natürlich ist die generelle Erhöhung der Plattendicke h auf h^* eine Vereinfachung. Es ist zu erwarten, daß die Massenverteilung durchaus von Einfluß auf die Eigenfrequenzen sein wird, weniger für die Grundfrequenz, mehr für die höheren Eigenfrequenzen. Es sollen im folgenden die Eigenfrequenzen bestimmt werden für den Fall, daß h nicht mehr konstant, sondern eine Funktion $h(x)$ ist.

$$5.4) \quad \frac{Eh^2}{12\rho} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) + \frac{h(x)}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn das obige Modell der ausgesteiften Platte als richtig angesehen wird, daß die Platte im allgemeinen die Dicke h und nur an bestimmten Stellen x_j eine größere Dicke $h(x) = h + \Delta h(x_j \pm \epsilon)$ besitzt. Die Dgl. einer Platte mit veränderlicher Dicke würde sonst ganz anders aussehen müssen. 17) 18)

Zur Abspaltung der z - bzw. t -Abhängigkeit werde der Ansatz gemacht:

$$5.5) \quad u = \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x) \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{i\bar{\omega}_n t}$$

Damit verbleibt eine gewöhnliche Dgl. jedoch mit dem veränderlichen Koeffizienten $\frac{h(x)}{h}$.

$$5.6) \quad \frac{Eh^2}{12\rho} \left(\frac{\partial^4 u_n(x)}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x^2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 u_n(x) \right) - \frac{h(x)}{h} \bar{\omega}_n^2 u_n(x) = 0$$

17) E.G.Goloskokow, A.P.Filippow:
Instationäre Schwingungen mechanischer Systeme
Akademie Verlag Berlin 1971 S.89

18) S.Timoshenko: Theory of Plates and Shells
Mc Graw-Hill Book company, Inc.
New York and London 1940 S.195

Auf 5.6) soll das Galerkin-Verfahren angewandt werden. Dazu wird für $v_n(x)$ ein Ansatz gemacht, der die geforderten Randbedingungen erfüllt. Hier:

$$5.7) \quad v_n(x) = \sum_{m=1}^{M_0} v_{mn} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a}$$

Dann ist der Reihe nach die Gl. 5.6), nachdem 5.7) eingesetzt wurde, mit $\sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a}$ ($\mu=1 \div M_0$) zu multiplizieren und über die Erstreckung in x-Richtung zu integrieren. Es ergibt sich das folgende homogene Gleichungssystem:

$$5.8) \quad \sum_{m=1}^{M_0} \left\{ \frac{Eh^2}{12\beta} \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 \right\} \int_{-a}^a \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx - \bar{\omega}_c^2 \int_{-a}^a \frac{h(x)}{h} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx \} v_{mn} = 0$$

Das erste Integral ist geschlossen auswertbar.

$$\int_{-a}^a \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx = \alpha \cdot \delta_{m\mu} \quad \delta_{m\mu} = 1 \text{ für } m=\mu \\ = 0 \text{ für } m \neq \mu$$

Da für $h(x)$ geschrieben werden soll,

$$5.9) \quad h(x) = h + \Delta h(x_j \pm \epsilon), \quad j = 1 \dots J$$

J Gesamtzahl der Steifen

$F_j = 2\epsilon \cdot \Delta h$ Querschnittsfläche der Steife j

läßt sich das zweite Integral aufteilen.

$$5.10) \quad \int_{-a}^a \frac{h(x)}{h} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx = \\ \alpha \cdot \delta_{m\mu} + \sum_{j=1}^J \frac{\Delta h(x_j)}{h} \int_{x_j-\epsilon}^{x_j+\epsilon} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+a)}{2a} dx$$

Wenn wir jetzt abweichend von 5.3) schreiben,

$$5.3a) \quad \Omega_e^2 = \frac{Eh^2}{12\rho_p} \left(\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 \right),$$

wird mit 5.9) und 5.10) aus 5.8):

$$5.11) \quad \sum_{m=1}^{M_0} \left\{ \Omega_e^2 \delta_{m\mu} - \bar{\omega}_e^2 \left(\delta_{m\mu} + \sum_{j=1}^J \frac{\Delta h(x_j)}{a \cdot h} \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} \sin \frac{m\pi(x+\alpha)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+\alpha)}{2a} dx \right) \right\} U_{mn} = 0$$

Zur Auswertung des verbleibenden Integrals:

$$5.12) \quad \int_{x_j-\varepsilon}^{x_j+\varepsilon} \sin \frac{m\pi(x+\alpha)}{2a} \sin \frac{\mu\pi(x+\alpha)}{2a} dx = \left\{ \varepsilon - \frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi(x_j+\alpha)}{a} \sin \frac{m\pi\varepsilon}{a} \right\}_{m=\mu}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \left\{ \frac{(m+\mu) \cos \frac{\pi(m-\mu)(x_j+\alpha)}{2a} \sin \frac{\pi(m-\mu)\varepsilon}{2a} - (m-\mu) \cos \frac{\pi(m+\mu)(x_j+\alpha)}{2a} \sin \frac{\pi(m+\mu)\varepsilon}{2a}}{m^2 - \mu^2} \right\}_{m+\mu}$$

Gl. 5.11) kann abgekürzt geschrieben werden:

$$5.13) \quad (\Omega - \bar{\omega}_e^2 \{ \mathcal{E} + \mathcal{B} \}) U_{mn} = 0$$

Dabei ist Ω eine Matrix, in der nur die Hauptdiagonale besetzt ist, und zwar mit den Werten Ω_e^2 nach 5.3a), \mathcal{E} ist die Einheitsmatrix, \mathcal{B} ist eine Matrix, die mit den Koeffizienten gemäß 5.11) zu besetzen ist.

5.13) ist ein homogenes Gleichungssystem, das nur dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

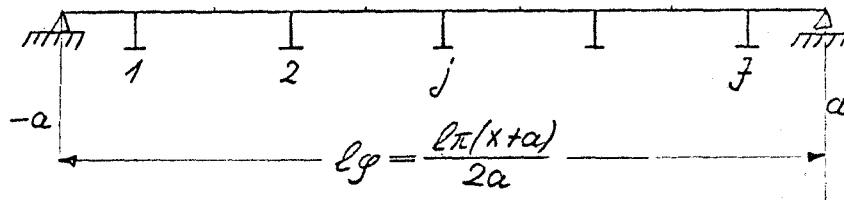
$$5.14) \quad \det | \Omega - \bar{\omega}_e^2 \{ \mathcal{E} + \mathcal{B} \} | = 0$$

Aus dieser Beziehung sind die neuen Eigenfrequenzen $\bar{\omega}_e^2$ zu bestimmen.

Sind gleiche Steifen symmetrisch zur Plattenmitte angeordnet, so bleibt von 5.12) nach der Summation über alle j nur für $m=\mu$ etwas übrig, nämlich $J \cdot \varepsilon$. Das in 5.11) eingesetzt bedeutet nichts weiter als die Erhöhung der Plattendicke von h auf h^* .

Physikalisch sinnvoll kann diese Abschätzung nur bleiben, wenn J groß gegen m ist, oder anders, wenn die Biegewellenlänge groß gegenüber dem Steifenabstand ist. Im anderen Fall würde sonst die Verdrehung der Steifen, die hier vernachlässigt wurde, von Bedeutung werden.

Obige Aussagen seien noch etwas näher erläutert:

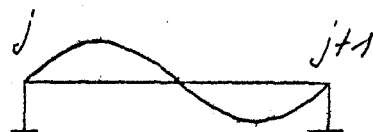
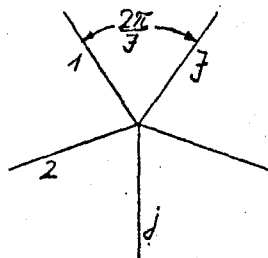


Die Gesamtlänge $2a$ der Platte wird in J gleiche Streifen geteilt, auf jeden wird in der Mitte eine Steife aufgesetzt. Dann sind alle Plattenstreifen gleich, keiner ist vor einem anderen besonders ausgezeichnet. Die Summation gemäß 5.11) über alle Steifen gibt nach 5.12) zunächst $J \cdot \varepsilon$ für $m = \mu$. Für die noch verbleibenden restlichen Anteile sei abgekürzt geschrieben:

$$\sum_{j=1}^J \cos l_j \varphi_j \quad l=1,2,3\dots$$

Für ungerades l ist $\cos l_j \varphi$ eine zur Plattenmitte $x=0$ ungerade Funktion. Da die Steifen gleich und durch obige Anordnung zur Plattenmitte symmetrisch gesetzt sind, verschwindet die Summe.

Für gerades l ergibt sich folgendes Bild: Zunächst sei $l=2$, dann ist die Plattenlänge $2a$ auf das Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ abgebildet.



für $l=2J$

Die Summe ist für $l=2$ gleich Null, sie ist sogar solange gleich Null bis $l=2J$ ist. Das bedeutet aber, dass der Steifenabstand gerade gleich der Biegewellenlänge ist. Dieser Fall muß aber bereits lange ausgeschlossen sein, da die Steifen dann nur als Torsionsfedern wirken.

6. Beispiele

Die numerischen Rechnungen ⁺⁾ wurden für den Fall der elastischen Platte in einem starren Rahmen und zwar für vier verschiedene Fälle durchgeführt. Es wurde einmal die Flügelzahl N , dann der Abstand y_0 der Platte von der Propellerachse geändert. Außerdem wurde ein Beispiel für einen freifahrenden Propeller gerechnet, während die anderen im Nachstrom eines Schiffes arbeiten. Die Daten zu den Beispielen:

Bsp.	(1)	$N=3$	$y_0=1,2R_0$	freifahrend
	(2)	$N=3$	$y_0=1,2R_0$	Nachstrom
	(3)	$N=4$	$y_0=1,2R_0$	Nachstrom
	(4)	$N=4$	$y_0=1,4R_0$	Nachstrom

6.1 Zur Berechnung des Propellerdruckfelds am Ort y_0

Beim Bsp. (1) wurde eine vom Radius s und der momentanen Winkelstellung φ unabhängige Zirkulation Γ gewählt.

In den anderen drei Fällen wurde eine von Brunnstein ¹⁹⁾ angegebene Zirkulationsverteilung (Bild 1) benutzt. Die für das Dickenfeld benötigten Konstanten zur Bestimmung der Quell-Senkenbelegung nach Gl. 4.17) stammen von Armonat. ¹³⁾

+) Die numerischen Rechnungen konnten dankenswerter Weise auf der Rechenanlage des Deutschen Elektronensynchrotrons DESY in Hamburg durchgeführt werden.

19) K. Brunnstein: Wechselwirkung zwischen Schiffsnachstrom, Schraubenpropeller und Schiffsruder
Diss. Universität Hamburg Mai 1968

Die Propellerdaten:

$$R_I = 0.04 R_0$$

$$\lambda = \frac{u_0}{\omega R_0} = 0.25$$

$$B_0 = -B_1 = 0.02 \cong \left(\frac{D}{R_0}\right)_{\max} = 0.03 \text{ für } s = 0.6 R_0$$

$$D_a / D_i = 1/7$$

$$\chi_H = -\chi_V = 0.4$$

$$k_1 = 0.32 R_0$$

Die Rückfeilung wurde hier noch nicht berücksichtigt:

$$\Delta\chi = 0$$

Für die Auftragung wurde die dimensionslose Darstellung

$$\frac{P - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = \sum_{k=0}^{K_0} \frac{P_{kN}(x, z)}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} \cos(k N \varphi_0 - \varepsilon(x, z))$$

gewählt.

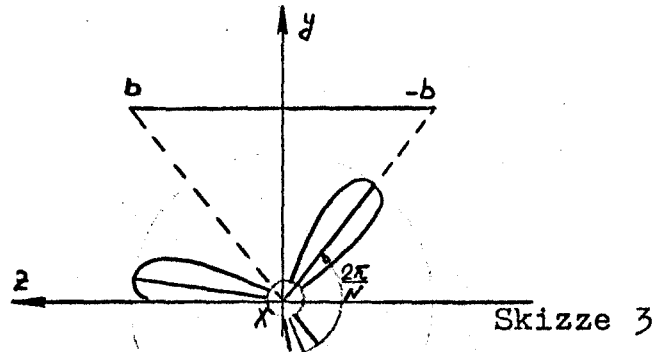
Die Bilder 2-3 zeigen die 1. harmonische Komponente $k=1$ des Propellerdruckfeldes, ein Ergebnis, wie es aus der Literatur ²⁰⁾ für den freifahrenden Propeller bereits bekannt ist.

Zwei Strömungsfelder, nämlich das aus der Wirbelbelegung und das aus der Quell-Senkenbelegung, überlagern sich. Während sich die Phasenlage des ersten beim Durchgang durch die Ebene $x=0$ um π ändert auf Grund der Unstetigkeit der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit, bleibt für die Quell-Senkenströmung die Phasenlage gleich, das bedeutet, vor dem Propeller addieren sich die Druckanteile, hinter dem Propeller subtrahieren sie einander.

Der Phasenwinkel ändert sich in x -Richtung ($z=0$) bei allen Beispielen um ca. $130^\circ - 150^\circ$ beim Durchgang durch die Propellerebene, um dann kurz vor bzw. hinter dem Propeller schon bald wieder einen nahezu konstanten Wert anzunehmen. Hier gehört der größere Wert zu den Beispielen im Schiffsnachstrom, der kleinere zum freifahrenden Propeller.

20) W.H.Isay: s. 12) S.101-110

In z-Richtung ($x=0$) ändert sich der Phasenwinkel um das kN -fache des Öffnungswinkels, der bestimmt ist durch den Propellermittelpunkt und die Plattenränder $\pm b$.



Die Belastung ändert also in x-Richtung einmal, in der z-Richtung evtl. mehrmals das Vorzeichen zu einer festen Zeit φ .

Bei den Propellern im Schiffsnachstrom überwiegt bei der Druckamplitude der Anteil, der vom Drucksprung herrührt, da die Belastung (s. Bild 1, $\varphi=0$) in der Nähe der Platte gerade die höchste ist und weit über der mittleren Belastung liegt. Der Dickeneinfluß ist der gleiche und damit hier relativ kleiner.

Für die Beispiele (1) und (2) liegt auch noch die 2. harmonische Komponente vor (Bild 4-5), die bei Bsp. (2) doch noch bis zu 50% der ersten ausmacht. Die in den Bildern 2-5 aufgetragenen Werte sind, will man den Einfluß der starren Wand berücksichtigen, zu verdoppeln; d.h. man tut so, als wäre in diesem Fall der Druck dimensionslos mit $\rho \omega^2 R^2$.

6.2 Die Bestimmung des Zusatzpotentials ϕ_{II} das den Einfluß der Elastizität wiedergibt

Das Potential ϕ_{II} ist nach 1.13) zu berechnen, dabei wurde das in Abschnitt 5. angegebene Modell einer orthotropen Platte benutzt. Für die Beispielrechnung getroffene Annahmen sind:

Die Platte ist direkt über dem Propeller angeordnet, der elastische Ausschnitt befindet sich bei

$$-a \leq x \leq a$$

$$-b \leq z \leq b.$$

Gerechnet wurde mit $a=b=R_0$.

Die Dicke der Platte ist

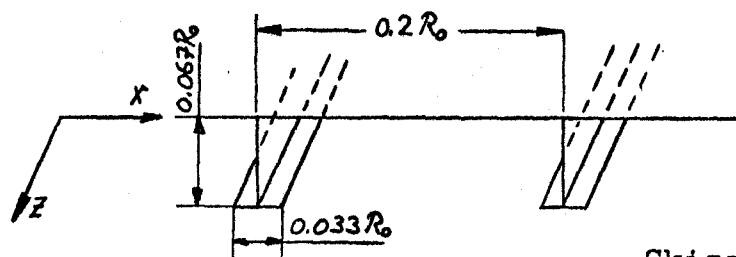
$$h = \frac{1}{250} R_0,$$

die Dichte des Plattenmaterials

$$\rho_p = 8 \cdot \rho_0.$$

Die Abmessungen der Platte wurden deshalb relativ groß gewählt, weil das Druckfeld in eine doppelte sin-Reihe zu entwickeln war, es wurde an den Rändern gewaltsam zu Null definiert. Im Abstand R_0 von der Propellerebene ist es bereits genügend klein, sodaß fünf Reihenglieder für jede Richtung ausreichend waren. Dadurch wurde aber, um weiterhin realistische Verhältnisse zu behalten, die Aussteifung des vorgegebenen Plattenfeldes unbedingt nötig.

Die Anordnung der Steifen geht aus folgender Skizze hervor.



Skizze 4

Damit ergibt sich für das Verhältnis des Trägheitsmoments von Platte mit Steife zu Platte allein zu

$$a_z = 750.$$

Da sich die schwingende Masse der Platte durch die aufgesetzten Steifen vergrößert, ist eine fiktive Höhe h^* zu bilden, und zwar ist:

$$\rho_p (2a \cdot 2b \cdot h + \sum_{j=1}^J V_j) = \rho_p \cdot 2a \cdot 2 \cdot b \cdot h^*$$

J Gesamtzahl der Steifen

V_j Volumender Steife j

Die weitere Rechnung erfolgt dann wie mit einer homogenen Platte der Dicke h^* .

$$h^* = \frac{1}{150} R_0$$

In die elastische Rechnung geht entscheidend (s. Gl. 5.3) der Absolutwert der Spitzenumfangsgeschwindigkeit des Propellers ein, und zwar in Gestalt des Parameters $\frac{E}{\rho_0 \omega^2 R_0^2}$. Um dieses einmal zu zeigen, wurde für einen dreiflügeligen Propeller dieser Parameter systematisch variiert, und zwar so, daß dabei die Eigenfrequenz der Grundform ($m=n=1$) von der Grunderregung $k=1$ durchfahren wurde. Für die Bestimmung der Eigenfrequenz s. Gl. 1.17) und 5.3). Konstant blieb bei dieser Rechnung der Fortschrittsgrad $\lambda = \frac{U_0}{\omega R_0} = 0.25$. Im Bild 6 ist das Ergebnis aufgetragen und zwar die Amplitude der Auslenkung der Grundform A_{111} bezogen auf die statische Auslenkung. Die Schwierigkeiten der numerischen Auswertung für den Resonanzfall wurden bereits zu Ende des Abschnitts 1 angesprochen. Wir erhalten hier eine Überhöhung um das 33-fache bei $\lambda=0.25$. Es stellt sich heraus, daß die hydrodynamische Dämpfung, die auf Seite 15 näher erläutert wurde, etwa von gleicher Größe ist wie eine Materialdämpfung innerhalb der Konstruktion.

Für eine Gruppe von vier im folgenden näher diskutierter Beispiele wurde eine Spitzenumfangsgeschwindigkeit von $\omega R_0 = 24 \text{ m/s}$ gewählt, wie sie ein Modellpropeller mit einem Durchmesser von 0.3m bei einer Drehzahl von 25Hz etwa erreicht. Der Elastizitätsmodul ist der von Stahl: $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Um die Bedeutung der Nähe zu einer Resonanzstelle zu verdeutlichen wurde die Beziehung 1.16) ausgewertet und die Ergebnisse in Tabelle 2 zusammengestellt.

n	m	N=3			N=4		
		$\left(\frac{\omega_e}{N\omega}\right)^2$	$\left(\frac{\omega_{ew}}{N\omega}\right)^2$	k_R	$\left(\frac{\omega_e}{N\omega}\right)^2$	$\left(\frac{\omega_{ew}}{N\omega}\right)^2$	k_R
1	1	18,8	1,99	1,41	10,6	1,12	1,06
	2	19,3	3,06	1,75	10,9	1,73	1,31
	3	21,2	4,44	2,11	11,9	2,49	1,58
	4	25,9	6,64	2,58	14,6	3,76	1,93
	5	35,6	10,7	3,27	20,0	6,0	2,45
2	1	300	47,7	6,9	169	26,9	5,2

Tabelle 2

In dieser Tabelle 2 ist zunächst das Verhältnis von Eigenfrequenz der Platte in Luft zu anregender Frequenz eingetragen, dann das Verhältnis von Eigenfrequenz unter Berücksichtigung des angrenzenden Wassers zu Erregerfrequenz. Der daraus ermittelte Wert k_R gibt theoretisch den Fall an, wo in diesem Fall Resonanz zu erwarten wäre. Wenn k_R ganzzahlig also gleich k ist, ist die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz. Man ersieht, daß bei diesen Beispielen eine Resonanzstelle nicht direkt getroffen wurde, ja, die Abstände zu einer Resonanzstelle sind gerade noch groß genug, um aus der Rechnung mit je fünf Ansatzgliedern für die x- und z-Richtung stabile Ergebnisse zu bekommen.

Die Eigenfrequenzen liegen in jedem Fall über der untersten Erregerfrequenz. Es wird sich für beide Flügelzahlen für die erste Zeitharmonische der Anregung die Grundschwingungsform einstellen wollen. (Die Abbildungen 7-10 zeigen entweder die 1. für N=3 und N=4 oder die 2. Harmonische für N=3 allein.) Das ist allerdings auch stark abhängig von der Größe der zugehörigen Teilamplitude m der Anregung in x-Richtung.

Aus den Bildern 2 und 4 läßt sich unschwer erkennen, daß diese Teilamplituden mit $m > 1$ sicher noch bedeutend sein werden. Das insbesondere für alle Nachstrompropeller, nicht so sehr ausgeprägt für den freifahrenden Propeller.

Es ist also zu erwarten, daß die Platte in der Hauptsache in der Grundform und in den ersten Oberschwingungsformen in x schwingen wird, wobei je nach Beispiel mal die eine oder andere stärker ausgeprägt sein wird.

In z -Richtung liegen auf Grund der Versteifungen die höheren Eigenfrequenzen gleich so hoch, daß praktisch nur die Grundform in Frage kommt, was auch deutlich aus den Auslenkungsgeschwindigkeiten (Bild 11-14) hervorgeht.

Das Propellerdruckfeld wird durch Überlagerung des induzierten Druckfeldes zum anregenden Druckfeld erweitert.

Liegt die Anregung relativ weit von Resonanzstellen entfernt, so ist die Erweiterung des Propellerdruckfeldes durch den induzierten Druck nur gering, wie bei $N=3$ und der ersten Harmonischen der Anregung. Zu vergleichen sind die Kurven ① und ② der Bilder 2 und 3 mit den gleichen Kurven in den Bildern 7 und 8. Liegt man näher, wie bei $N=4$ und $k=1$, das sind die Kurven ③ und ④ in den genannten Bildern, so ist sie doch recht bedeutend. Relativ nah bei einer Resonanzstelle befinden wir uns auch für $N=3$ und $k=2$. (s. Tabelle 2 für $m=3$) Die Rechnung ergibt hier nur eine geringe Vergrößerung der Amplitude durch den Einfluß der Elastizität, stärker hat sich jedoch noch der qualitative Verlauf geändert. Der Einfluß der zweiten Oberschwingungsform erscheint schon als weniger bedeutend. Hier sind die Kurven ① und ② der Bilder 4 und 5 mit den Bildern 9 und 10 zu vergleichen.

Das Verhalten der Auslenkungsgeschwindigkeit entspricht qualitativ dem Einfluß der Elastizität wie er auch beim induzierten Druckfeld auftrat.

6.3 Die Abstrahlung ins Fernfeld durch die schwingende Platte

Für die Abstrahlung ins Fernfeld ist die Beziehung 2.11) auszuwerten. Wie schon in Abschnitt 2 abgeschätzt, liefern die Rechnungen für das Fernfeld ein $\sim \frac{1}{r}$ abklingendes, praktisch kugelsymmetrisches Druckfeld. Das Verhältnis $M_a = \frac{\omega R_0}{c_0} = 0,05$ wurde für alle Beispiele gleich eingesetzt.

Die für das Fernfeld erhaltenen Ergebnisse zeigen folgendes:

Beim freifahrenden Propeller werden die Amplituden des Druckfeldes allein durch den elastischen Anteil bestimmt, während beim Nachstrompropeller die Amplituden, die vom Drucksprung herrühren, und der Anteil aus der Elastizität etwa von vergleichbarer Größenordnung sind.

Dieses Ergebnis scheint verständlich, da aus der Hydroakustik des unbegrenzten Raumes bekannt ist, daß bedeutsame Beiträge nur durch die instationäre Belastung der Propellerflügel entstehen und diejenigen des stationären Belastungsanteils um mehrere Größenordnungen überwiegen. ¹⁾

Befindet sich eine Platte in der Nähe auch eines freifahrenden Propellers, so entsteht durch die Anregung am elastischen Plattenbereich eine Schallquelle, die bei der Abstrahlung ins Fernfeld den überwiegenden Anteil liefert. Dagegen stellen die durch den Nachstrom belasteten Propellerflügel schon selbst eine Schallquelle dar wie die elastische Platte; somit ist die Abstrahlung gleicher Größenordnung durchaus plausibel. (Bild 15-18)

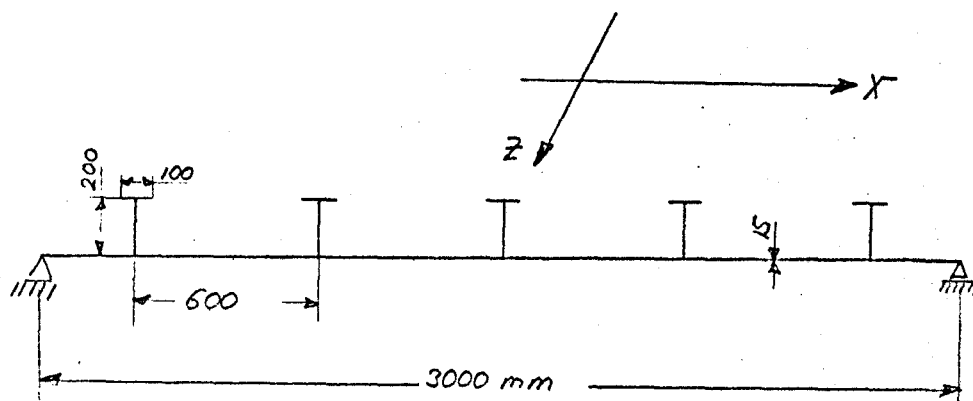
Zu den Auftragungen der Kurven ① - ⑥ sei folgende Erklärung angefügt.

Es wird unterschieden zwischen dem Schalldruck, wie er von der schwingenden Platte allein abgestrahlt wird, und dem Schalldruck des Propellers, wie er vorhanden wäre, wenn die Platte insgesamt starr wäre. Die Auftragung erfolgte getrennt. So stellt die Kurve ① das Druckfeld auf Grund der schwingenden Platte dar, die durch einen freifahrenden dreiflügeligen Propeller zu Biegeschwingungen angeregt ist. In Kurve ③ sehen wir das Ergebnis, wenn die Anregung durch den gleichen, jetzt aber im Nachstrom arbeitenden Propeller, erfolgt. Kurve ② zeigt den allein von der instationären Belastung herrührenden Schalldruck dieses Propellers. In ④ sieht man das gleiche Ergebnis für den Propeller mit vier Flügeln. Dieser 4-flügelige Propeller im Nachstrom regt die Platte zu Schwingungen an. Der in diesem Fall abgestrahlte Schalldruck ist in ⑤ für den Abstand $y_0 = 1,2R_0$ und in ⑥ für den Abstand $y_0 = 1,4R_0$ der Plattenebene von der Propellerachse eingetragen. Aus dem Verlauf von ①, ③, ⑤, ⑥ als Funktion von x in Bild 15 bzw. als Funktion von r in Bild 16 (x, r Zylinderkoordinaten) entnimmt man die kugelsymmetrische Charakteristik für diese Schalldruckanteile.

Für die Richtcharakteristik des Propellerdrucks allein erkennt man, daß dafür sicher auch die Flügelzahl N verantwortlich ist. Die Amplituden für große Werte x ist bei $N=4$ ca. eine Größenordnung höher als für große Werte r . Für $N=3$ ist es gerade umgekehrt. Für nähere Einzelheiten sei auf den nachfolgenden Abschnitt 6.4 verwiesen.

Da für $N=3$ auch die zweite ($k=2$) Harmonische des Schalldrucks vorliegt, (Bild 17 und 18) können hier noch Vergleiche zur ersten ($k=1$) gezogen werden. Der Unterschied für den Fall der Anregung durch einen freifahrenden oder einen Nachstrompropeller ist für $k=1$ geringer als für $k=2$. Es sei daran erinnert, daß für $N=3$ und $k=2$ eine größere Nähe zur Eigenfrequenz mit $m=3$ bestand. Die Anregung mit einer größeren zweiten Harmonischen, wie es beim Nachstrompropeller der Fall ist, läßt für das mit dieser Frequenz abgestrahlte Fernfeld eine größere Bedeutung erkennen.

Jetzt seien die Rechnungen auf die Großausführung eines Schiffes übertragen, nämlich es sei $R_0=3m$ und die Größe der Platte nicht mehr $2R_0 \cdot 2R_0$, sondern $R_0 \cdot R_0$ gewählt. Eine größere ebene Platte im Hinterschiff ist wohl kaum anzutreffen; die Beplattung dort dürfte vielmehr gewölbt sein und dadurch noch steifer werden. Dieses Modell hier soll auch lediglich der Abschätzung der Verhältnisse am wirklichen Schiff dienen.



Skizze 5

Der Steifenabstand von 600mm entspricht dem Spantabstand, die Dicke von Platte und Steifen wurde mit $h=15\text{mm}$ angenommen. Damit ergeben sich die für die Rechnung benötigten Werte in diesem Fall:

$$a=b=0.5R_0; \quad h=\frac{1}{200}R_0; \quad h^*=\frac{1}{133}R_0; \quad a_z=520.$$

Außerdem wurde $\omega R_0=40\text{m/s} \cong \text{ca. } 1300\text{U/min}$ gewählt.

Mit diesem elastischen Modell wurde für den 4-flügeligen Propeller im Nachstrom ebenfalls eine Beispielrechnung durchgeführt, und zwar wurden die anregenden Druckamplituden bis $k=6$ berücksichtigt.

Während die betragsmäßig großen Druckamplituden weit von der ersten Resonanzstelle entfernt liegen, sind die, die näher daran sind, bereits klein. Die unterste Eigenfrequenz liegt erst in der Nähe der vierten Harmonischen $k=4$ der Anregung. Dazu das Bild 19 für die Abnahme der Druckamplituden an drei verschiedenen Aufpunkten.

Das Ergebnis für die Auslenkungsgeschwindigkeit zeigt einen Rückgang bis maximal zwei Größenordnungen. Auch sind hier noch die höheren Harmonischen von \dot{v} kleiner als die unteren. Die Anregung mit der 4. Harmonischen ist schon so klein, daß sie trotz der Nähe zur Resonanzstelle nicht mehr durchschlägt.

Für die Abstrahlung ins Fernfeld überträgt sich dieses Ergebnis natürlich voll, sodaß für die Großausführung im Fernfeld gilt, daß die Drücke dort in der Hauptsache durch die instationäre Belastung der Propellerflügel geprägt werden, während die Anteile auf Grund der schwingenden Platte kleiner geworden sind, da ihre Ursache selbst klein wurde.

Die Auftragung dieses Ergebnisse war in den Bildern 15-18 wegen des dortigen Maßstabes nicht mehr möglich.

Zum Schluß soll noch das Ergebnis der Rechnung für ein drittes Plattenmodell mitgeteilt werden. Dieses ist angeregt durch Modellpropeller, erstens HSVA 1077, zweitens HSVA 1151.

Neu ist die Variation des Fortschrittsgrades λ , und zwar einmal durch Ändern der Anströmgeschwindigkeit u_0 , zum zweiten durch Ändern der Spitzenumfangsgeschwindigkeit ωR_0 ; das bedeutet bei festem Durchmesser Ändern der Drehzahl. Die Belastungen wurden für beide Propeller den Freifahrt diagrammen entnommen. Damit ist das instationäre Propellerdruckfeld am Ort der Platte berechnet. Für das elastische Verhalten der Platte ist nun entscheidend, wie die Änderung von λ zustandekommt. Das Ergebnis der Rechnung, und zwar gleich für das Fernfeld zeigt Bild 20. Das Fernfeld hängt, wie schon erwähnt,⁺⁾ nur vom Kehrwert des Abstandes r und von keiner weiteren Aufpunktvariablen ab. Die Amplitudenwerte des Drucks können also entsprechend dieser Gesetzmäßigkeit $\sim \frac{1}{r}$ für andere Abstände aus den in der Auftragung angegebenen Werten ermittelt werden.

Im ersten Fall, $u_0 = \text{konst.}$, ωR_0 variabel, nähert man sich bei Verringerung von λ der Eigenfrequenz der Grundform. Diese ist als Punkt R_{11} gekennzeichnet.

Im zweiten Fall, $R_0 = \text{konst.}$, u_0 variabel, bleibt dieser Abstand von Erreger- zu Eigenfrequenz konstant.

Es ist dies gerade der Abstand des ^{Schnitt-}punktes zweier zusammengehöriger Kurven vom Punkt R_{11} .

Die betragsmäßige Zunahme auch hier resultiert daraus, daß mit kleinerem Fortschrittsgrad die Belastung zunimmt.

Aus dieser Rechnung wird deutlich, welcher entscheidenden oder welcher geringen Einfluß die Variation des Fortschrittsgrades haben kann, je nachdem ob λ durch ein anderes u_0 oder durch ein anderes ωR_0 verändert wird, oder anders formuliert, von welcher Bedeutung die Kenntnis der Lage der Eigenfrequenz ist.

+) Das Fernfeld ist beim freifahrenden Propeller bekanntlich nur durch die schwingende elastische Platte bestimmt.

6.4 Die vom Propeller selbst im Fernfeld induzierten Druckschwankungen

Für die Berechnung der Druckfeldamplituden aus der Belastung, die zum Vergleich benötigt wurden, wurden die von Isay ¹⁾ ²¹⁾ angegebenen und auch von Armonat ²⁾ benutzten Formeln herangezogen:

$$6.1) \quad \frac{P_{sp} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} e^{i\nu(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N})} \int_{s=R_0}^{R_0} \frac{\partial P_{\nu}(s)}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} \cdot$$

$$\frac{e^{i\nu(\frac{\omega}{c_0 \beta^2} D_n - \frac{\omega u_0}{c_0^2 \beta^2} x)}}{(D_n + \frac{\omega}{c_0} r s \sin \vartheta_n)^3} \cdot \left(-s \left(x + \frac{\omega u_0}{c_0^2} r s \sin \vartheta_n + \frac{\omega^2}{\beta^2 c_0^2} r s \cos \vartheta_n \left(\frac{u_0}{c_0} D_n - x \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - i\nu \left(D_n + \frac{\omega}{c_0} r s \sin \vartheta_n \right) \frac{\omega}{c_0 \beta^2} \left(x - \frac{u_0}{c_0} D_n \right) - \frac{k_n}{s} \left\{ -\beta^2 r s \sin \vartheta_n - \frac{\omega}{c_0} r s \cos \vartheta_n D_n + i\nu \frac{\omega}{c_0} r s \sin \vartheta_n \left(D_n + \frac{\omega}{c_0} r s \sin \vartheta_n \right) \right\} \right) ds$$

mit
$$D_n = \sqrt{x^2 + \beta^2 (r^2 + s^2 - 2 r s \cos \vartheta_n)}$$

$$\vartheta_n = \varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} \right) + \frac{\omega u_0}{\beta^2 c_0^2} x - \frac{\omega}{\beta^2 c_0} D_n$$

Auf Grund der Schließungsbedingung für die Dicke sind von dort im Fernfeld keine Anteile zu erwarten. Das Druckfeld des gespiegelten Propellers, d.h. den Einfluß der starren Wand erhält man, wenn man in 6.1) y durch $(2y_0 - y)$ ersetzt. (entspr. in D_n und ϑ_n) Für die Grenzfälle, nämlich $x^2 \gg r^2$, bzw. $r^2 \gg x^2$ sollen aus 6.1) übersichtlichere Beziehungen hergeleitet werden, um näheren Einblick in die recht verwickelten Verhältnisse beim Propeller zu erhalten.

21) W.H.Isay: Theoretische Grundlagen der Hydroakustik des Schraubenpropellers
Ing.Archiv, Bd.35, 1967, S.382-400

Für $x^2 \gg r^2$ läßt sich 6.1) unter Vernachlässigung von Termen, die von höherer Ordnung klein sind, für das Fernfeld schreiben:

$$6.2) \quad \frac{P_{\text{sp}} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} e^{i\nu(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N})} \cdot \int_{s=R_I}^{R_0} \frac{dP_{\nu}(s)}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} e^{i\nu \frac{\omega R_0 \cdot x}{c_0 R_0}} \left\{ \frac{i\nu}{x} \cdot \frac{\omega R_0}{c_0} \cdot \frac{s}{R_0} \right\} ds + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Mit

$$dP_{\nu}(s) = \sum_{\mu} \rho_0 \omega T_{\nu\mu} \sin \mu \vartheta$$

und

$$s = \frac{R_0 + R_I}{2} - \frac{R_0 - R_I}{2} \cos \vartheta$$

kann die Integration ausgeführt werden:

$$6.3) \quad \frac{P_{\text{sp}} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{16} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} e^{i\nu(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N})} e^{i\nu \frac{\omega R_0 \cdot x}{c_0 R_0}} \cdot \frac{i\nu}{x} \cdot \frac{\omega R_0}{c_0} \cdot \left\{ \frac{T_{\nu 1}}{\omega R_0^2} \left(1 - \left(\frac{R_I}{R_0}\right)^2\right) - \frac{T_{\nu 2}}{\omega R_0^2} \frac{\left(1 - \left(\frac{R_I}{R_0}\right)^2\right)^2}{2} \right\}$$

Unter Berücksichtigung von

$$6.4) \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\nu \frac{2\pi n}{N}} = N(\delta_{0\nu} + \delta_{N\nu} + \dots + \delta_{kN\nu}); \quad \delta_{kN\nu} = 1 \text{ für } \nu = kN \\ = 0 \text{ für } \nu \neq kN$$

ist für die Amplitude des Drucks im Fernfeld

$$6.5) \quad \frac{|P_{kN}|}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = \frac{1}{\frac{8x}{R_0}} \cdot \frac{\omega R_0}{c_0} \cdot N \left\{ kN \frac{T_{kN1}}{\omega R_0^2} \left(1 - \left(\frac{R_I}{R_0}\right)^2\right) - kN \frac{T_{kN2}}{\omega R_0^2} \frac{\left(1 - \left(\frac{R_I}{R_0}\right)^2\right)^2}{2} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

zu schreiben.

Aus 6.5) erkennt man sehr deutlich, daß es für große Abstände x in der Hauptsache auf das Produkt von Flügelzahl N und der zugehörigen Zeitamplitude mit dem Index kN der Zirkulation ankommt.

Für $r^2 \gg x^2$ kann 6.1) analog zu 6.2) in folgender Form geschrieben werden:

$$6.6) \quad \frac{P_{sp} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} \frac{1}{T} \frac{k_n \omega}{c_0} e^{i\nu(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \frac{\omega T}{c_0})}$$

$$\int_{s=R_T}^{R_0} \frac{\partial p_{\nu}(s)}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} (\cos \vartheta_n - i\nu \sin \vartheta_n) ds + O\left(\frac{1}{T^2}, \frac{1}{c_0^2}\right)$$

$$\vartheta_n \approx \varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0} \sqrt{1 - \frac{2s}{R_0}} \cos \vartheta_n$$

$$\approx \varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0} + \frac{\omega s}{c_0} \cos\left(\varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0}\right)$$

$$e^{i\vartheta_n} \approx e^{i\left(\varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0}\right)} \left\{ 1 + i \frac{\omega s}{c_0} \cos\left(\varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0}\right) \right\}$$

$$\approx e^{i\left(\varphi - \left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right) - \frac{\omega T}{c_0}\right)}$$

$$6.7) \quad \frac{P_{sp} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} \frac{1}{T} \frac{k_n \omega}{2c_0} \left[(-\nu+1) e^{i(\varphi + (\nu-1)\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \frac{\omega T}{c_0}\right))} \right.$$

$$\left. + (\nu+1) e^{-i(\varphi - (\nu+1)\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \frac{\omega T}{c_0}\right))} \int_{s=R_T}^{R_0} \frac{\partial p_{\nu}(s)}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} ds \right]$$

Mit den auch schon vorher benutzten Beziehungen für $\partial p_{\nu}(s)$ und s erhält man:

$$6.8) \quad \frac{P_{sp} - P_0}{\frac{\rho_0}{2} \omega^2 R_0^2} = -\frac{1}{8} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu} \frac{1}{T} \frac{k_n \omega}{c_0} \left\{ (-\nu+1) e^{i(\nu-1)\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right)} \right.$$

$$\left. + (\nu+1) e^{i(\nu+1)\left(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}\right)} - i(\varphi - (\nu+1)\frac{\omega T}{c_0}) \right\} \frac{T \nu_1}{\omega R_0^2} \cdot \frac{1 - \frac{R_T}{R_0}}{2}$$

$$6.9) \quad \frac{|P_{AN}|}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R_0^2} = \frac{1}{\frac{8\Gamma}{R_0}} \frac{k_0 \omega}{c_0} \cdot N \left\{ kN \frac{\Gamma_{kN-1,1}}{\omega R_0^2} - kN \frac{\Gamma_{kN+1,1}}{\omega R_0^2} \right\} \left(1 - \frac{R_I}{R_0}\right)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Während es für große Abstände x auf die Anteile der Zirkulation ankam, deren Ordnung ein ganzzahliges Vielfaches der Flügelzahl war, sind hier die dazu benachbarten Anteile maßgebend. Enthält die Zirkulation große Anteile mit gradzahliger Ordnung wie bei diesem Beispiel - das rührt daher, daß die Nachstromverteilung von einem Schiff mit einer Stevenhacke stammt - können für Flügelzahlen, die gerade sind, ganz andere Werte errechnet werden als für Propeller mit ungerader Flügelzahl. Hier war konkret Γ_3 ca. $1/10$ von Γ_4 . Demzufolge unterscheiden sich die Druckfeldamplituden für große x für $N=3$ und $N=4$. (Bild 15 Kurven ② und ④) Gerade umgekehrt ist das Verhalten für große Werte r , oder anders, da Γ_3 und Γ_5 klein gegenüber Γ_4 , bedeutet das für große Werte r , daß der Propeller mit $N=4$ ein weit reichendes Nahfeld hat. Fernfeld ist erst dann, wenn auch die Terme, die von höherer Ordnung in $\frac{1}{r}$ verschwinden, wirklich klein geworden sind, da sie teilweise von vorneherein mit einem um ca. eine Größenordnung größeren Zirkulationsanteil zu multiplizieren waren. In Bild 16 ist der hier geschilderte Sachverhalt in Kurve ④ deutlich zu erkennen.

6.5 Numerische Ergebnisse zum rückwärts (skew) gepfeilten Propeller

Mit dem analytischen Ausdruck für die Rückpfeilung

$$6.10) \quad \gamma(s) = - \left(\frac{R_0 - s}{R_0 - R_T} \right)^m \cdot \Delta\chi \quad m=1$$

wurden Ergebnisse erstellt.

Durch die jetzt über den Propellerumfang gleichförmiger verteilte Belastung und die ebenso verteilte Dicke der Blätter ist zu erwarten, daß die Amplituden des instationären Drucks weitgehend abnehmen. Es wurde wieder mit einer Art Kreissektorflügel gearbeitet, d.h. das Propellerblatt wird gebildet in der Stellung $\varphi_0 + \gamma(s)$, zu der, um die flächenhafte Erstreckung zu bekommen, konstante Werte χ_H bzw. χ_V hinzuaddiert wurden.

Für den freifahrenden Propeller wurden zwei Beispiele, und zwar mit $\Delta\chi = \frac{\tau}{N} \cdot \frac{2\pi}{N}$ gerechnet und dem freifahrenden Propeller mit rein radial gerichteter tragender Linie gegenübergestellt. Der erwartete Effekt ist bereits deutlich zu erkennen und stimmt qualitativ mit Messungen recht gut überein. ²²⁾ Noch klarer dürfte er beim Nachstrompropeller mit ausgeprägten Belastungsspitzen auftreten.

Die Druckamplituden des Fernfeldes, bedingt aus der Elastizität der Platte, sind auf etwa die Hälfte zurückgegangen. (Bild 23 und 24)

22) S.S.Teel, S.B.Denny:
Field Point Pressures in the Vicinity of a
Series of Skewed Marine Propellers
NRSDC Report No.3278, August 1970

Anhang:

Momentenfrei gelagerte Rechteckplatte bei starrer Umgebung

In diesem Anhang soll eine geschlossene Darstellung für die schwingende Platte bei starrer Umgebung, d.h. ohne periodische Fortsetzung gegeben werden. Für das Nahfeld liefern diese Überlegungen einige neue Gesichtspunkte, was den Einfluß der angrenzenden Wassermasse angeht.

Ausgangspunkt ist auch hier die Dgl. der Platte, die erzwungene Biegeschwingungen ausführt. Aus dieser wird wieder durch Einführen der Randbedingung, nämlich, daß das gesuchte Zusatzpotential normal zur Platte abgeleitet am Ort der Platte die Schwingungsgeschwindigkeit liefern muß, eine Dgl. für das Zusatzpotential. Diese Beziehung sei zunächst noch einmal aufgeschrieben:

$$A.1) \quad B \left(\Delta \Delta \left(\frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \right) \right) + \rho_p \cdot h \frac{\partial^3 \phi_{II}}{\partial y \partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial t^2} + \rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \phi_{II}}{\partial x \partial t} = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) (\phi_I + \phi_{II}) \Big|_{y=y_0}$$

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie in Abschnitt 1. Der Ansatz für ϕ_{II} ist ebenfalls der Produktenansatz, der die Auflagerbedingungen, hier der momentenfrei gelagerten Platte, bereits erfüllt.

$$A.2) \quad \phi_{II} = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=K_0}^{K_0} A_{mnk} g(y) \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} e^{ikN\omega t}$$

Da ϕ_{II} das Verhalten eines Plattenausschnitts der Größe $2a \cdot 2b$ darstellen, im übrigen Bereich die Platte jedoch starr sein soll, muß gelten:

$$A.3) \quad \left. \frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \right|_{y=y_0} = \dot{v} \quad \text{für } |x| \leq a, \quad |z| \leq b$$

$$\left. \frac{\partial \phi_{II}}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0 \quad \text{für } |x| > a, \quad |z| > b$$

Aus diesem Grunde sei die Funktion

$$A.4) \quad f(x) = \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a}$$

einer Fouriertransformation ²³⁾ unterzogen, um dadurch eine geschlossene Darstellung für das abschnittsweise unterschiedliche Verhalten zu bekommen. ²⁴⁾

$$A.5) \quad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\lambda\alpha} d\alpha$$

Da $f(\alpha)$ nur im Bereich $-a \leq \alpha \leq a$ definiert sein soll, schränkt man das Integrationsintervall in A.5) entsprechend ein.

$$A.6) \quad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \sin \frac{m\pi(\alpha+a)}{2a} e^{-i\lambda\alpha} d\alpha$$

$F(\lambda)$ ist die Fouriertransformierte zu $f(\alpha)$. $f(x)$ erhält man wieder durch die Umkehrung der Transformation.

$$A.7) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\lambda(x-\alpha)} d\alpha d\lambda$$

Ist $f(x)$ reell, so gilt:

$$A.8) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos \lambda(x-\alpha) d\alpha d\lambda$$

Mit A.4) erhält man schließlich:

$$A.9) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\alpha=-a}^a \sin \frac{m\pi(\alpha+a)}{2a} \cos \lambda(x-\alpha) d\alpha d\lambda$$

23) W.Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik
Akademische Verlagsgesellschaft
Geest&Portig K.-G. Leipzig 1950 S.71-72

24) O.Grim: Der hydrodynamische Druck an einer frei aufgelagerten Platte, deren Umgebung starr ist.
(unveröffentlicht)

Die Integration über α läßt sich geschlossen ausführen und ergibt:

$$A.10) \quad f(x) = -\frac{m}{2a} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \lambda(x-\alpha) - \cos \lambda(x+\alpha)}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \lambda^2} d\lambda$$

Mit A.10) kann der Ansatz A.2) geschrieben werden:

$$A.11) \quad \phi_{III} = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} e^{ikN\omega t}$$

$$\frac{mn}{4ab} \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\mu=0}^{\infty} g(y) \frac{[(-1)^m \cos \lambda(x-\alpha) - \cos \lambda(x+\alpha)][(-1)^n \cos \mu(z-b) - \cos \mu(z+b)]}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 - \mu^2} d\lambda d\mu$$

Die noch freie reelle Funktion ist aus der Kontinuitäts-gleichung zu bestimmen.

$$A.12) \quad (\lambda^2 + \mu^2) g(y) - \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = 0$$

Die Lösung dieser Dgl. ist:

$$g(y) = F_1(\lambda, \mu) \cdot e^{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cdot (y - y_0)} + G_1(\lambda, \mu) \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cdot (y - y_0)}$$

Hier ist $G_1(\lambda, \mu)$ von vorneherein identisch Null zu setzen, da sonst für $y \rightarrow -\infty$ das Potential über alle Grenzen wächst.

Die jetzt noch freie Funktion $F_1(\lambda, \mu)$ ist aus der Bedingung A.3) an der Platte, die nichts weiter be-

sagt, daß $\left. \frac{dg(y)}{dy} \right|_{y=y_0} = 1$ ist, zu gewinnen.

$$F_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

Mit der Abkürzung

$$A.13) \quad \text{INT} = \frac{[(-1)^m \cos \lambda(x-\alpha) - \cos \lambda(x+\alpha)][(-1)^n \cos \mu(z-b) - \cos \mu(z+b)]}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 - \mu^2}$$

und nach Einführen von Polarkoordinaten $\lambda = r \cos \varphi$, $\mu = r \sin \varphi$ heißt somit der vollständige Lösungsansatz für ϕ_{III} .

$$A.14) \quad \phi_{II} = \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} e^{ikN\omega t}$$

$$\frac{mn}{4ab} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{\tau(y-y_0)} INT dr d\varphi$$

Dieser Ansatz für ϕ_{II} muß in A.1) eingesetzt werden, um daraus dann die unbekanntes Ansatzkoeffizienten A_{mnk} zu ermitteln.

$$A.15) \quad \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} e^{ikN\omega t} \cdot \frac{mn}{4ab}$$

$$\left\{ \rho_p \cdot h \left(\frac{B}{\rho_p \cdot h} \Delta \Delta - k^2 N^2 \omega^2 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{\tau(y-y_0)} INT r dr d\varphi \right.$$

$$\left. + \rho_0 \left(-k^2 N^2 \omega^2 + ikN\omega u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{\tau(y-y_0)} INT dr d\varphi \right\}_{y=y_0} =$$

$$- \rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) (\phi_I + \phi_{II})_{y=y_0}$$

Wenn die Integrale in A.15) hinreichend konvergieren, darf der Grenzübergang $y \rightarrow y_0$ und die Integration vertauscht werden. Im ersten Integral ist das sicher der

Fall, da es für $y=y_0$ für $|x| \leq a, |z| \leq b$ $\sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b}$

und $|x| > a, |z| > b$ den Wert Null liefert, so war es ja gebildet. Für die weiteren Betrachtungen kann hier wieder der Sinus geschrieben werden, da es für diese Rechnung nur auf den elastischen Ausschnitt ankommt. Die geschlossene Darstellung ist noch benötigt beim zweiten Integral, da dort nicht nach y zu differenzieren war. Dennoch darf auch hier der Grenzübergang $y \rightarrow y_0$ vollzogen werden, da nur eine räumliche Ableitung, nämlich nach x , gefordert ist, das Integral auch dann noch trotz der Unstetigkeit für $x=\pm a$ existiert.

$$\begin{aligned}
 \text{A. 16)} \quad & \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{k=-K_0}^{K_0} A_{mnk} e^{ikN\omega t} \int_{y_0}^y \eta (\omega_c^2 - k^2 N^2 \omega^2)^{-1/2} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} \\
 & + \varrho_0 (-k^2 N^2 \omega^2 + ikN\omega u_0 \frac{\partial}{\partial x}) \frac{mn}{4ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} INT dr d\varphi = \\
 & - \varrho_0 (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u_0 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}) (\Phi_I + \Phi_{II}) \Big|_{y=y_0}
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck INT ist noch auf seine Stetigkeit hin zu untersuchen. Hier ist von folgenden Beziehungen Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned}
 (-1)^m \cos \lambda(x-a) - \cos \lambda(x+a) &= -2 \cos \lambda x \cos \lambda a \\
 & \text{für } m \text{ ungerade} \\
 &= 2 \sin \lambda x \sin \lambda a \\
 & \text{für } m \text{ gerade}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^m \sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x+a) &= -2 \sin \lambda x \cos \lambda a \\
 & \text{für } m \text{ ungerade} \\
 &= -2 \cos \lambda x \sin \lambda a \\
 & \text{für } m \text{ gerade}
 \end{aligned}$$

Der Nenner in INT verschwindet für $\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}$ und für $\mu \rightarrow \frac{n\pi}{2b}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}} \frac{-2 \cos \lambda x \cos \lambda a}{(\frac{m\pi}{2a})^2 - \lambda^2} &= \lim_{\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}} \frac{2(x \sin \lambda x \cos \lambda a + a \cos \lambda x \sin \lambda a)}{-2\lambda} \\
 &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{2a^2}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{2a} \\
 & \text{für } m \text{ ungerade}
 \end{aligned}$$

Da m ungerade ist, gehen Zähler und Nenner gegen Null; der Grenzwert darf nach der Regel von Bernoulli de l'Hospital gebildet werden.

Weiter sind die Ausdrücke zu betrachten:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}} \frac{2 \sin \lambda x \sin \lambda a}{(\frac{m\pi}{2a})^2 - \lambda^2} &= (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{2a^2}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{2a} \\
 & \text{für } m \text{ gerade}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}} \frac{2 \sin \lambda x \cos \lambda a}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \lambda^2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2a^2}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{2a}$$

für m ungerade

$$\lim_{\lambda \rightarrow \frac{m\pi}{2a}} \frac{2 \cos \lambda x \sin \lambda a}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \lambda^2} = (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{2a^2}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{2a}$$

für m gerade

Für $\mu \rightarrow \frac{n\pi}{2b}$ gelten diese obigen Überlegungen völlig analog.

Näheren Aufschluß über den Einfluß des angrenzenden Wassers erhält man aus A.16). Das soll im weiteren näher diskutiert werden und mit den in Abschnitt 1 getroffenen Annahmen und auch vorliegenden Meßergebnissen verglichen werden.

Der Integralausdruck in A.16)

$$A.17) \quad \rho_0 \frac{mn}{4ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} INT \, dr \, d\varphi = \rho_0 I_{(x,z)}^{m,n}$$

gibt für dieses mechanische Modell - im folgenden Modell II genannt -, nämlich elastischer Plattenausschnitt bei starrer Umgebung, den Einfluß des angrenzenden Wassers wieder, und ist direkt vergleichbar mit

$$A.18) \quad \frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b}$$

aus Gl. 1.10) vorn, wo in Kauf genommen wurde, daß sich der Vorgang periodisch in x,z fortsetzt - im folgenden Modell I genannt. Dort durfte die Amplitude $\frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}}$ sogleich als hydrodynamische Masse pro Flächeneinheit angesprochen werden. 6)

Der Ausdruck A.17) wurde für die Kombinationen n=1, m=1; n=1, m=2; n=1, m=3 ausgewertet und in den Bildern 25-27 mit A.18) verglichen.

Man erkennt, daß die Abhängigkeit von x nicht mehr sin-förmig ist, sondern zum Rand hin völliger. Physikalisch ist das so zu erklären, daß bei der periodischen Lösung das Wasser ausweichen kann, zwischen Schwingungsbauch und Schwingungstal hin und hergepumpt wird, während das beim starren Rand nicht mehr möglich ist, also auch mehr Wasser die Schwingung mitmachen muß. Daher erklärt sich auch der betragsmäßig größere Einfluß des Wassers. Um jedoch einen der hydrodynamischen Masse vergleichbaren Zahlenwert zu bekommen, soll folgende Größe ermittelt werden:

$$A.19) \quad I_0^{m,n} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b I(x,z)^{m,n} \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(z+b)}{2b} dz dx$$

Mit dieser Größe $I_0^{m,n}$ können nun Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung des Wassers sowohl nach Methode I als auch II berechnet und verglichen werden.

$$A.20) \quad \omega_{cW}^2 = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0}{\rho \cdot h} K(m,n)} \omega_e^2$$

Für $K(m,n)$ ist nach Methode I $\frac{1}{\sqrt{(\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{2b})^2}}$ und nach Methode II $I_0^{m,n}$ einzusetzen.

Aus Messungen ^{+) für ein quadratisches Modell mit der Kantenlänge $a=0,36m$ für den elastischen Ausschnitt und $a_g=0,90m$ für die gesamte Anordnung einschließlich der starren Berandung liegen Ergebnisse für die Eigenfrequenzen vor.}

In der nachfolgenden Tabelle sollen sie verglichen werden mit den Rechnungen:

^{+) Private Mitteilung der Forschungsgruppe Hydroakustik der Fraunhofergesellschaft, 8012 Ottobrunn.}

$\frac{Q_e}{Q_{ew}}$	Messung Ottoobrunn	Methode I	Methode II
$n=1$ $m=1$	2,22	2,17	2,73
$n=1$ $m=2$	1,92	1,83	2,01
$n=1$ $m=3$	1,61	1,63	1,73

Tabelle 3

Die Abweichungen der Rechenergebnisse nach Methode I von den Messergebnissen ist selbstverständlich, da dort der Fall der Methode II nachgebildet werden sollte. Die Abweichungen von den Rechnungen der Methode II muß wiederum so erklärt werden, daß eben durch einen starren Rahmen (der wiederum nicht absolut sondern nur relativ starr sein kann) die unendlich große starre Platte nur angenähert, aber nicht exakt nachgebildet werden kann. Weitere Abweichungen müssen auch aus der Nachbildung der freien Lagerung allein durch Schwächen der Plattenstärke auf halbe Dicke an den Rändern aber auch aus vereinfachenden Rechnungen (orthotrope Platte) erklärt werden.

Mit der Kenntnis dieser Ergebnisse und der Überlegung, daß sowohl Methode I als auch Methode II nur eine Annäherung der Wirklichkeit, die aber zwischen beiden liegt, sein können, erschien die einfachere und numerisch weniger aufwendige Methode I gerechtfertigt.

Schlußbemerkung:

Die von einem Propeller zu Schwingungen angeregten Bauteile des Hinterschiffs stellen neben dem Propeller selbst eine zusätzliche Schallquelle dar. Ja, sie können, wie für den freifahrenden Propeller gezeigt ist, sogar entscheidend sein. Während der instationär belastete Propeller ein komplizierter Schallstrahler mit einer ausgeprägten Richtcharakteristik ist (der Schalldruck für $x^2 \gg r^2$ unterscheidet sich stark von dem für $r^2 \gg x^2$), stellt die Platte in starrer Umgebung einen Strahler mit kugelsymmetrischem Druckfeld dar.

Allerdings muß dabei die Frage offen bleiben, inwieweit das in der vorliegenden Arbeit verwendete Modell eines elastischen Plattenausschnitts mit schallharter sehr weit (unendlich) ausgedehnter Umgebung wirklich ein realistisches Modell für die Verhältnisse am Hinterschiff liefert. In Wirklichkeit ist die Umgebung der Platte ja der weitere Schiffsrumpf; dieser ist im Hinterschiffsbereich gewöhnlich dreidimensional gewölbt und relativ steif, aber nicht absolut schallhart. Außerdem ist zu bedenken, daß die Schallwelle schon bald auf die Wasseroberfläche auftrifft. Dieses darf insbesondere deshalb nicht unerwähnt bleiben, da bei den niedrigen anregenden Frequenzen mit großen Wellenlängen ($\approx 10\text{m}$) zu rechnen ist. Es kommt also schon nach kurzer Lauflänge zum Übergang von quasi schallharter zu schallweicher Berandung. Wie die in der vorliegenden Arbeit angegebene Abschätzung für die freie Wasseroberfläche zeigt, bedeutet das aber eine Schallabstrahlung anderen Charakters (statt Monopolstrahlern sind es dann Dipolstrahler). Die Wirklichkeit würde somit die Behandlung eines komplizierten gemischten Randwertproblems erfordern, für das eine Theorie bisher nicht gefunden werden konnte.

Es muß aber auch noch auf andere Unsicherheiten hingewiesen werden, nämlich die genaue Bestimmung der anregenden Druckkraft, die exakte Wiedergabe des elastischen Verhaltens der Konstruktion und die Kenntnis der Bedingungen für die Schallabstrahlung (Schallgeschwindigkeit als Funktion von Luft-, Salzgehalt und Temperatur). Die hier durchgeführte Untersuchung wird einen qualitativen Anhalt bieten, sie kann wohl kaum quantitativ völlig richtige Ergebnisse liefern.

Die in dieser Arbeit gerechneten Beispiele (S.48-51 und Bilder 15-18) zeigen eine erhebliche Schallabstrahlung für den Fall, daß ein Modellpropeller eine recht große elastische Platte anregt. Um das physikalische Geschehen in den Griff zu bekommen, ist gerade ein Beispiel gewählt, bei dem man etwas sieht, wo also etwas passiert. Die Übertragung auf die Großausführung mit kleinerer, aber doch immerhin noch $R_0 \cdot R_0$ großer quadratischer Platte, liefert nur wenig Schalldruck im Fernfeld; hier ist es dann der instationär belastete Propeller, der in der Hauptsache abstrahlt. Es ist verständlich, daß die Abstrahlung klein ist, wenn es gelingt, die Schwingungen klein zu halten. Aber das braucht nicht immer zu gelingen; denkbar wäre irgendwo ein kleines Plattenfeld, so klein, daß es vielleicht nicht einmal ausgesteift ist, mit größeren Schwingungsamplituden, oder, vielleicht als anders Extrem, daß das Schiff in seiner Gesamtheit schwingt. Da kommen jedoch andere Formen der Anregung in Frage, etwa eine schnelllaufende Hilfsmaschine oder im zweiten Fall der unregelmäßige Seegang.

Zum Schluß sei Herrn Prof. Dr. W.H. Isay, Herrn Priv.Doz. Dr. M. Heckl und Herrn Prof. Dr. O. Grim für zahlreiche kritische Beiträge und fruchtbare Diskussionen während des Entstehens dieser Arbeit herzlichst gedankt.

Schrifttum:

- 1) W.H. Isay: Moderne Probleme der Propellertheorie
Springer Verlag
Berlin Heidelberg New York 1970 S.105-152
- 2) R. Armonat: Das hydroakustische Druckfeld eines
Propellers
Bericht Nr.209 des Instituts für Schiffbau
Universität Hamburg Juni 1968
- 3) S. Tsakonas, C.Y. Chen, W.R. Jacobs:
Acoustic Radiation of an Infinite Plate
Excited by the Field of a Ship Propeller
The Journal of the Acoustical Society of
America
Vol.36, No.9 September 1964, S.1708-1717
- 4) S. Tsakonas, C.Y. Chen, W.R. Jacobs:
Acoustic Radiation of a Cylindrical Bar
Excited by the Field of a Ship Propeller
The Journal of the Acoustical Society of
America
Vol.36, No.8 August 1964, S.1569-1588
- 5) I. Szabó: Höhere technische Mechanik
Springer Verlag
Berlin Göttingen Heidelberg 1958 S.78
- 6) O. Grim: Über den Einfluß der mitschwingenden
Wassermasse auf die Schwingungseigen-
schaften lokaler schwingungsfähiger
Systeme
Schiff und Hafen 1953 S.538-540
- 7) A.N. Tychonoff, A.A. Samarski:
Differentialgleichungen der mathematischen
Physik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1959 S.400
- 8) H. Viviand: L'Équation fondamentale de la théorie du
bruit aérodynamique dans le cas de surfaces
en mouvement de translation uniforme
Journal de Mécanique, Vol.9, No2, Juin 1970
S.333
- 9) E. Martensen: Potentialtheorie
B.G. Teubner, Stuttgart 1968 S.226
- 10) L. Cremer, M. Heckl:
Körperschall
Springer Verlag
Berlin Heidelberg New York 1967 S.446

- 11) O.D. Kellogg: Foundations of Potential Theory
Dover Publications, Inc.
New York 1959 S.286
- 12) W.H. Isay: Propellertheorie Hydrodynamische Probleme
Springer Verlag 1964
Berlin Göttingen Heidelberg S.1-9
- 13) R. Armonat: Untersuchung der Druckverteilung eines
Propellers unter Berücksichtigung grenz-
schichtbedingter Maßstabeffekte
Schiffstechnik Bd.16, 1969 S.41-54
- 14) R.F.S. Hearmon: An Introduction to Applied Anisotropic
Elasticity
Oxford University Press 1961 S.94
- 15) S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability
Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
New York and London 1936 S.381
- 16) H.A. Kamel, W. Birchler, D.Liu, I.W. McKinley, W.R. Reid:
An Automated Approach to Ship Structure
Analysis
The Society of Naval Architects and
Marine Engineers New York 1969 S.238
- 17) E.G. Goloskokow, A.P. Filippow:
Instationäre Schwingungen mechanischer
Systeme
Akademie Verlag Berlin 1971 S.89
- 18) S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells
Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
New York and London 1940 S.195
- 19) K. Brunnstein: Wechselwirkung zwischen Schiffsnachstrom,
Schraubenpropeller und Schiffsruder
Diss. Universität Hamburg Mai 1968
- 20) W.H. Isay: s. 12) S.101-110
- 21) W.H. Isay: Theoretische Grundlagen der Hydroakustik
des Schraubenpropellers
Ing. Archiv, Bd.35, 1967 S.382-400
- 22) S.S. Teel, S.B. Denny:
Field Point Pressures in the Vicinity
of a Series of Skewed Marine Propellers
NRSDC Report No.3278, August 1970
- 23) W. Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in
Physik und Technik
Akademische Verlagsgesellschaft
Geest&Portig K.-G. Leipzig 1950 S.71-72
- 24) O. Grim: Der hydrodynamische Druck an einer frei
aufgelagerten Platte, deren Umgebung starr
ist. (unveröffentlicht)

Bilder 1-27

- Bild 1: Zirkulationsverteilung für den Nachstrompropeller
- Bild 2-5: Propellerdruckfeld
- Bild 6: Auslenkung der Grundform als Funktion $N\omega/\omega_{ew}$
- Bild 7-10: Anregendes Druckfeld
- Bild 11-14: Auslenkungsgeschwindigkeit
- Bild 15-18: Fernfeld
- Bild 19: Druckamplituden $k=1\div 6$ des Propellerdruckfeldes
- Bild 20: Fernfeld für veränderlichen Fortschrittsgrad
- Bild 21-22: Druckfeld eines rückwärts (skew) gepfeilten Propellers
- Bild 23-24: Fernfeld des rückwärts gepfeilten Propellers
- Bild 25-27: Abbildungen zum Anhang

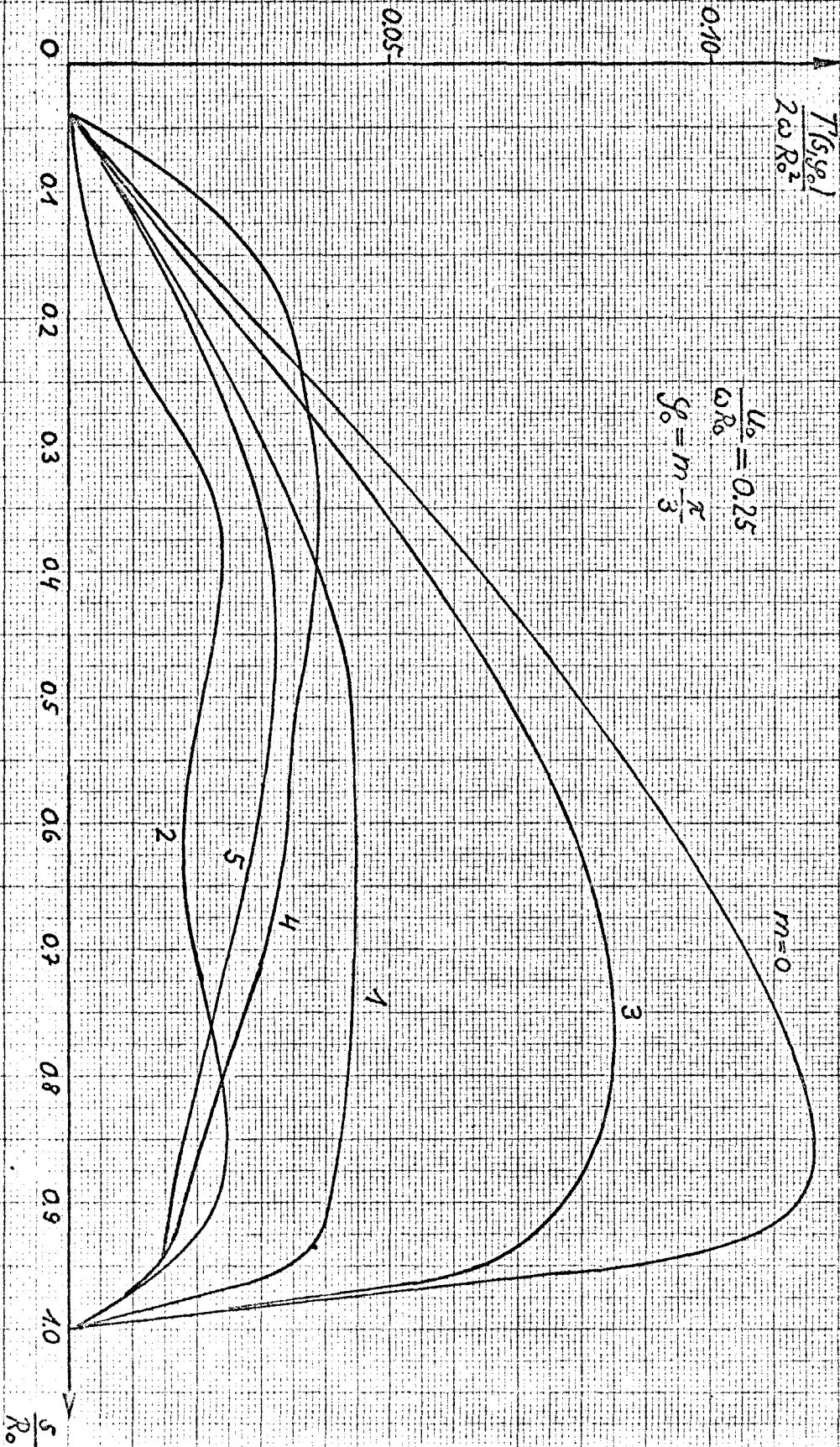


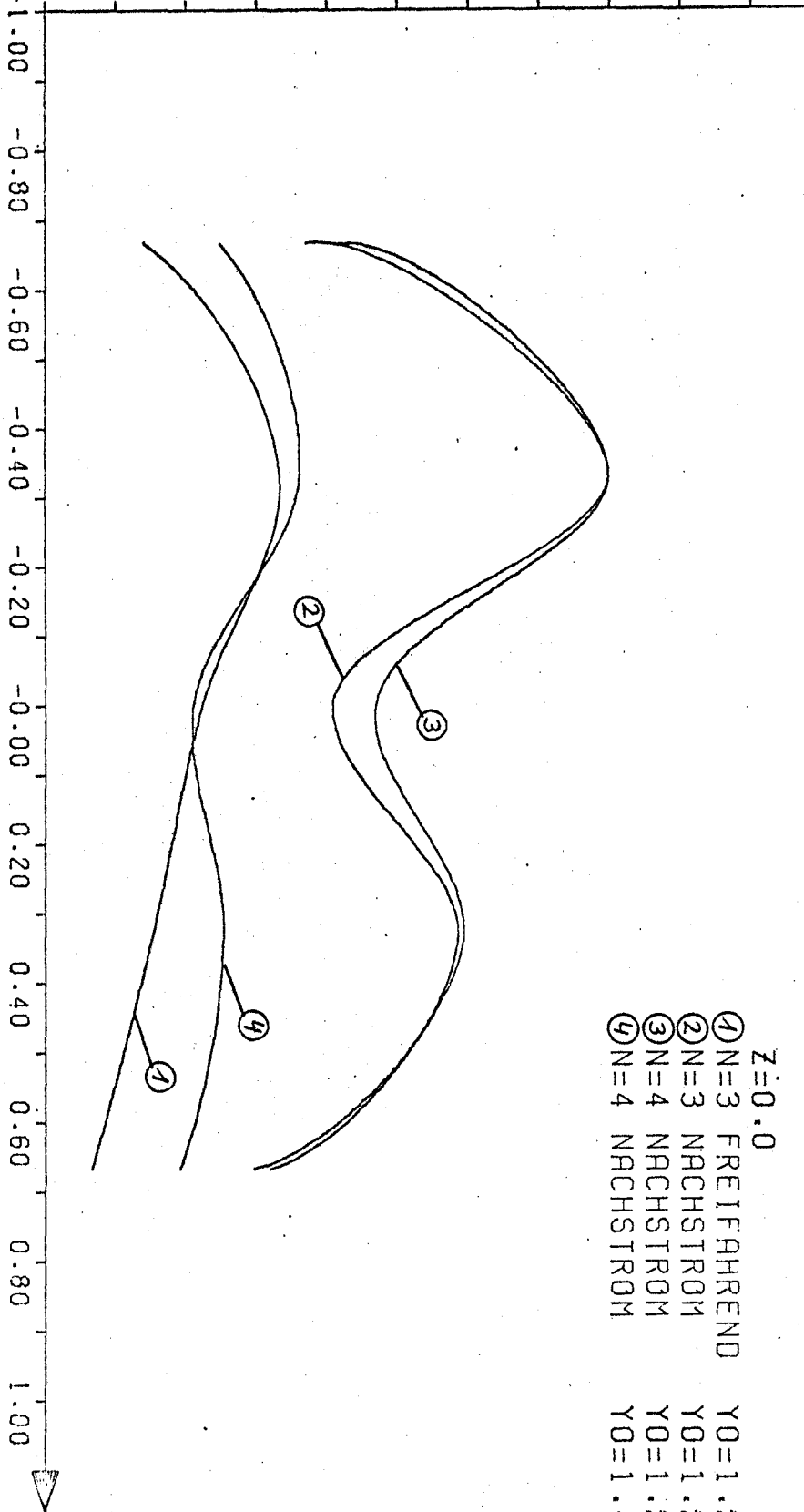
Bild. 1 Flügel-Zirkulation nach Brunnstein [19]

1. HARMON. DES PROPELLERDRUCKFELDES

$$\frac{P_{1N}}{\frac{\rho_0 \omega^2 R_0^2}{2}}$$

DRUCKAMPLITUDE $\cdot 10^{-1}$

0.00 0.04 0.08 0.12 0.16 0.20



Z=0.0

- ① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
- ② N=3 NACHSTROM Y0=1.2
- ③ N=4 NACHSTROM Y0=1.2
- ④ N=4 NACHSTROM Y0=1.4

$\epsilon [^\circ]$

PHASE

0.00 90.00 180.00

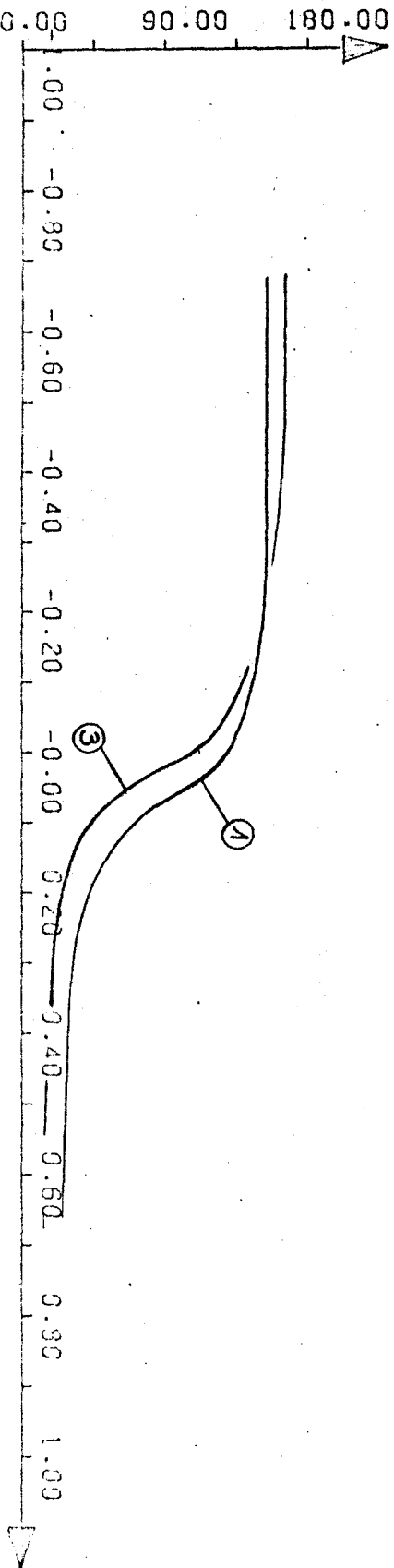


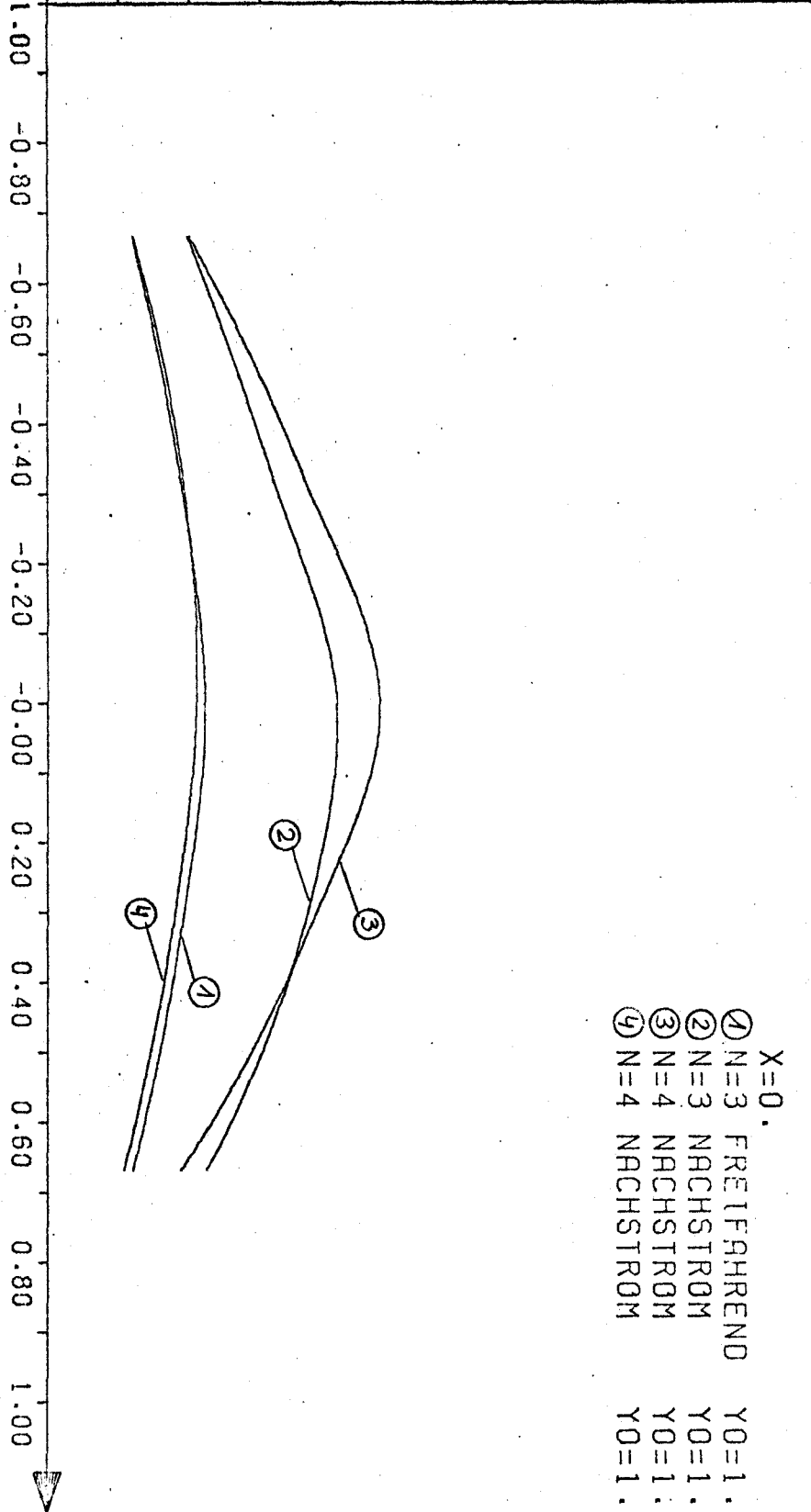
Bild: 2

1. HARMON. DES PROPELLERDRUCKFELDES

$$\frac{P_{1N}}{2 \rho \omega^2 R^2}$$

DRUCKAMPLITUDE * 10⁻¹

0.00 0.04 0.08 0.12 0.16 0.20



- X=0.
- | | |
|-------------------|--------|
| ① N=3 FREIFAHREND | Y0=1.2 |
| ② N=3 NACHSTROM | Y0=1.2 |
| ③ N=4 NACHSTROM | Y0=1.2 |
| ④ N=4 NACHSTROM | Y0=1.4 |

$\epsilon [^\circ]$

PHASE

0.00 90.00 180.00

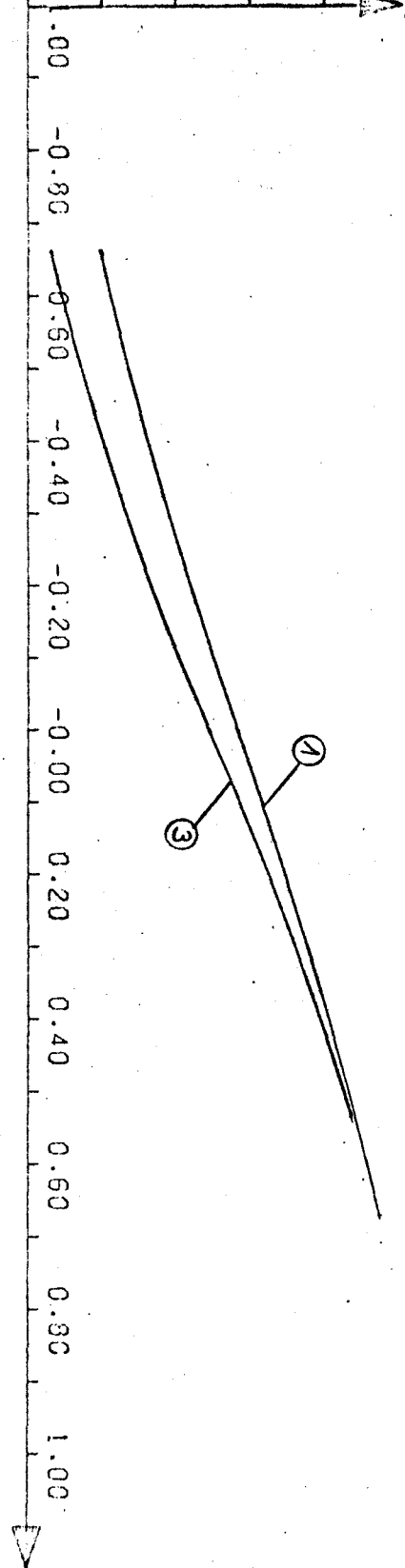


Bild. 3

2. HARMON. DES PROPELLERDRUCKFELDES

$$\frac{P_{2N}}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R_0^2}$$

Z=0.0
 ① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
 ② N=3 NACHSTROM Y0=1.2

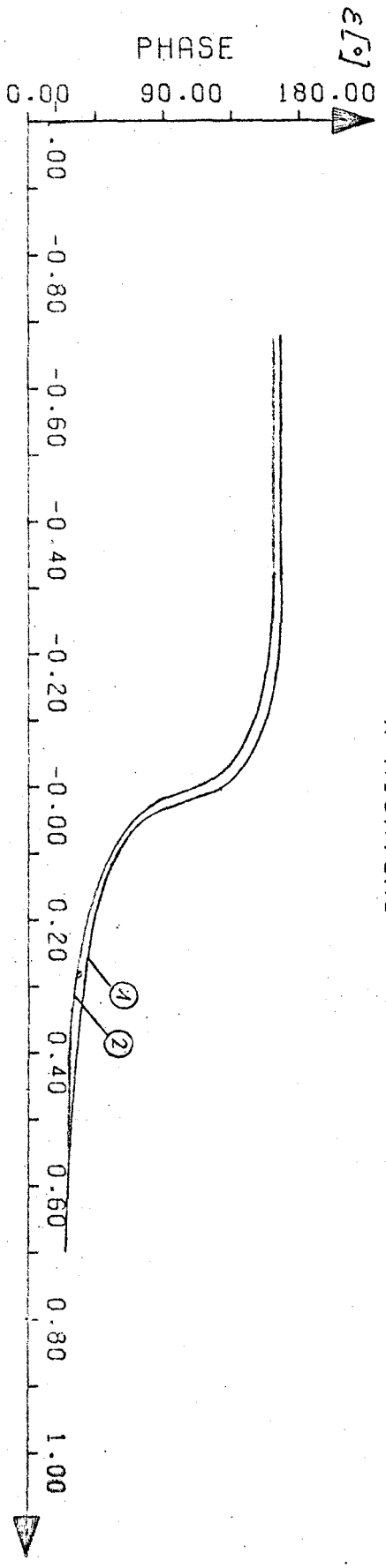
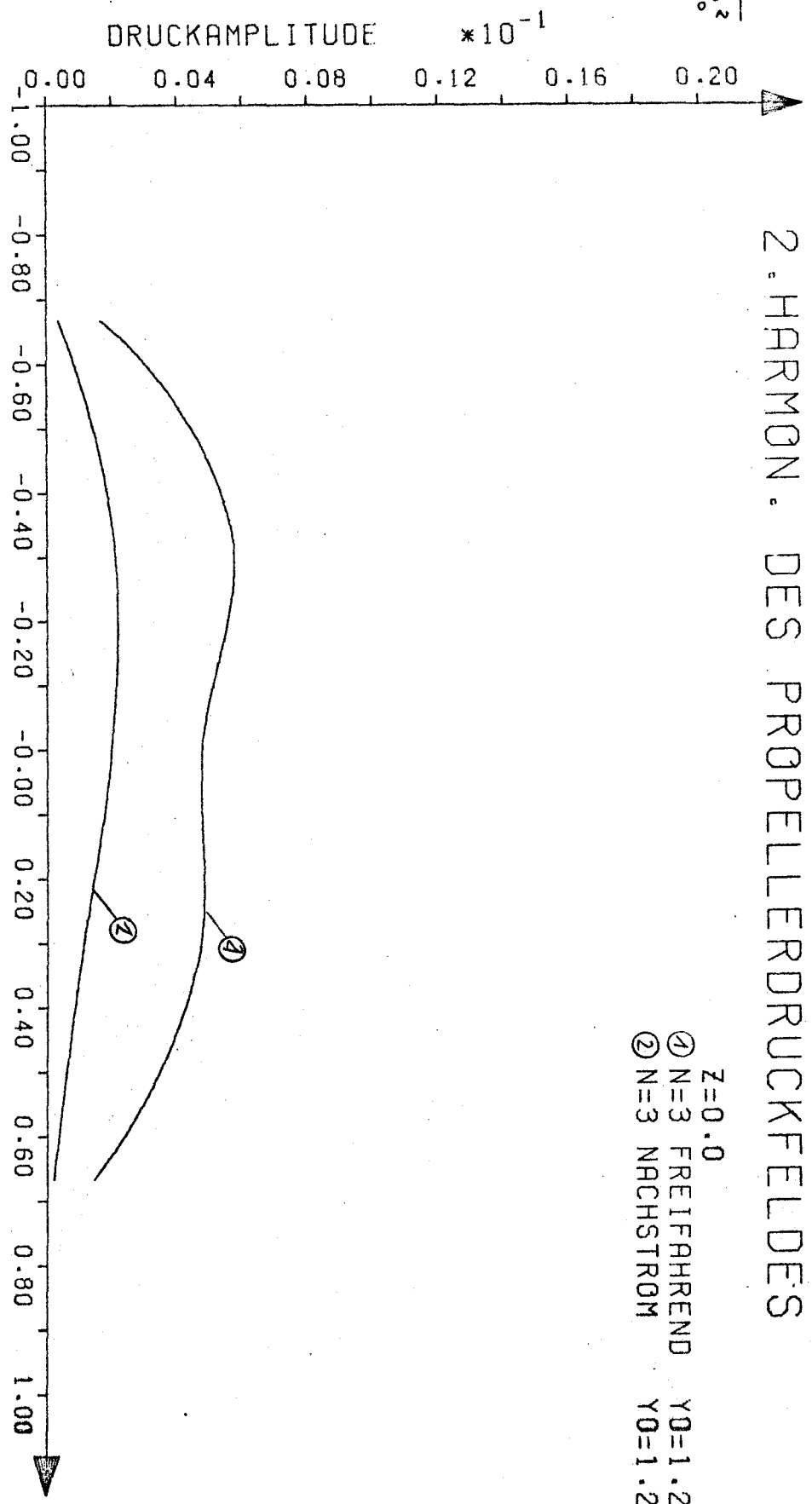


Bild:4

2. HARMON. DES PROPELLERDRUCKFELDES

$$\frac{P_{2N}}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^2}$$

X=0.
 ① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
 ② N=3 NACHSTROM Y0=1.2

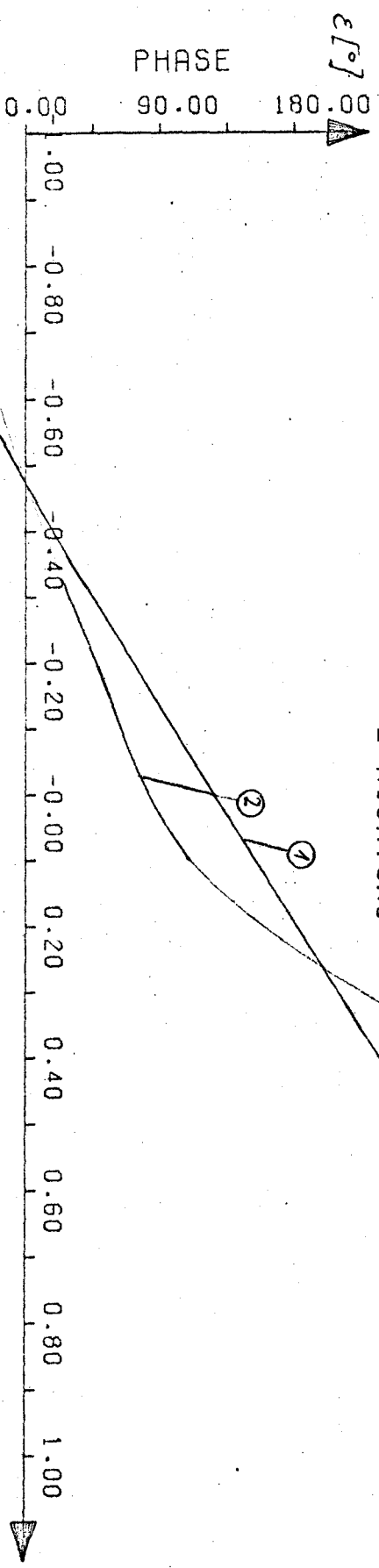
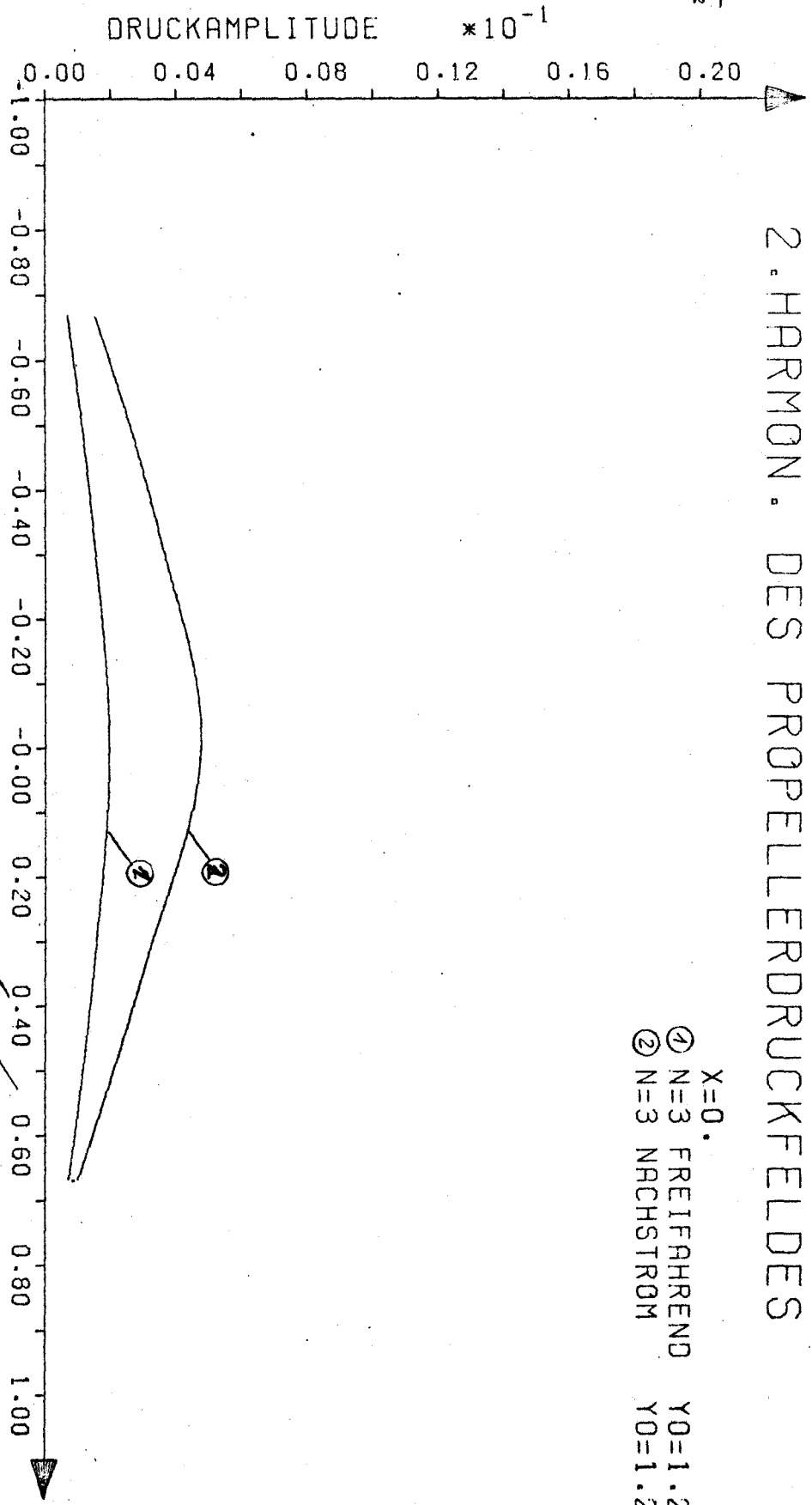


Bild 15

$\frac{A_{\text{max}}}{(A_{\text{max}})_{\text{stat}}}$

Auslenkung der Grundform

$$m=n=1; k=1$$

$$N=3; \lambda=0,25$$

30

20

10

1

0.5

1

$\frac{N_0}{\Omega_{\text{GV}}}$

10

20

30

40

$\Omega_R [\text{m/s}]$

Bild. 6

1. HARMON. DES ANREGENDEN DRUCKFELDES

Z=0.0		
① N=3	FREIFAHREND	Y0=1.2
② N=3	NACHSTROM	Y0=1.2
③ N=4	NACHSTROM	Y0=1.2
④ N=4	NACHSTROM	Y0=1.4

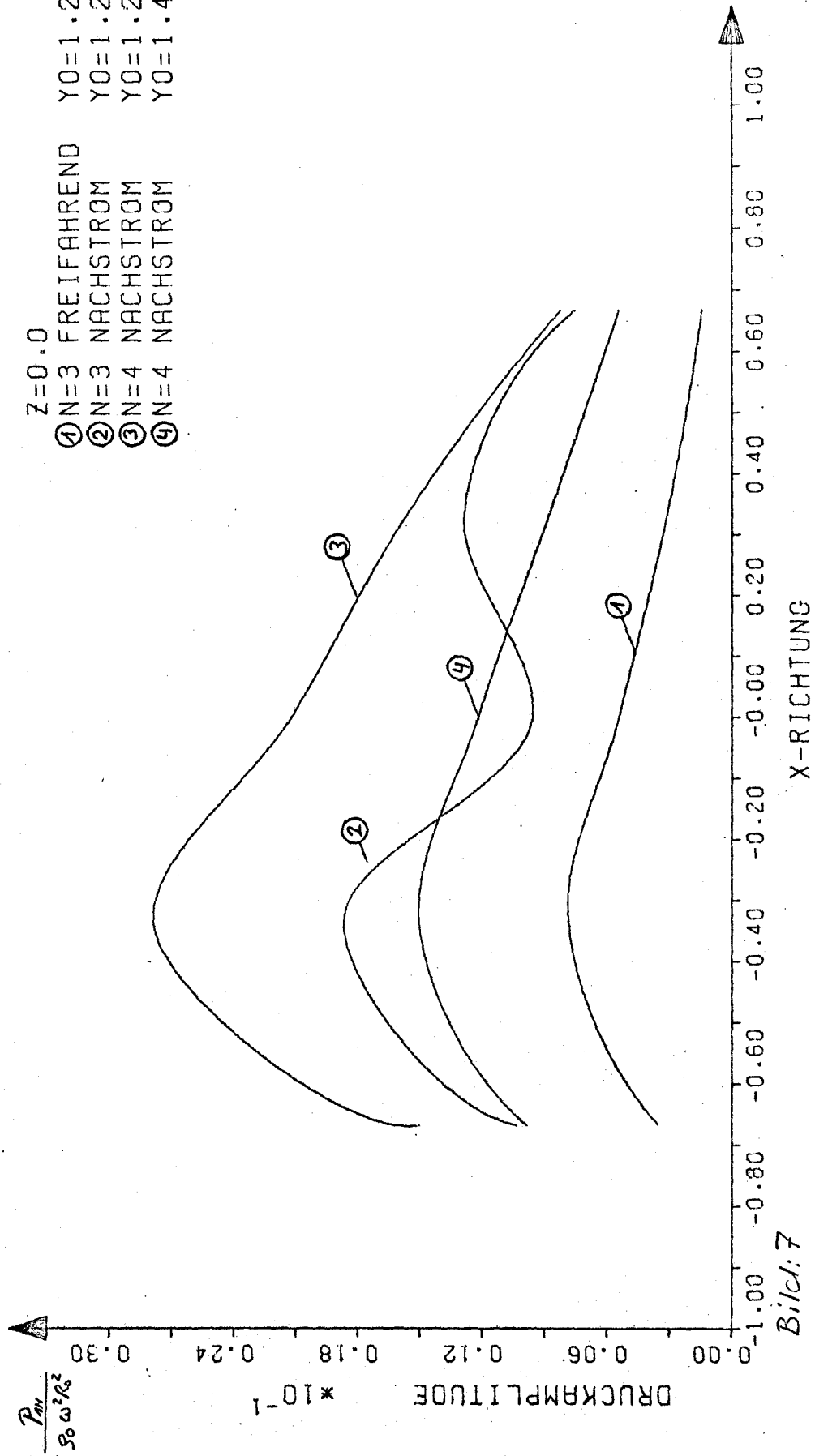


Bild: 7

1. HARMON. DES ANREGENDEN DRUCKFELDES

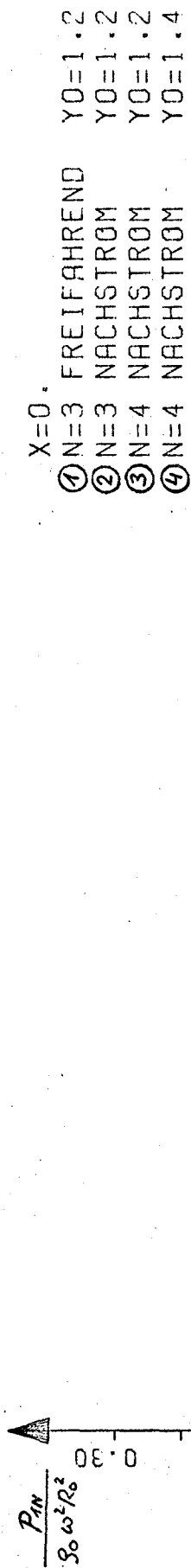


Bild: 8

2. HARMON. DES ANREGENDEN DRUCKFELDES

$Z=0.0$
① $N=3$ FREIFAHREND $Y_0=1.2$
② $N=3$ NACHSTROM $Y_0=1.2$

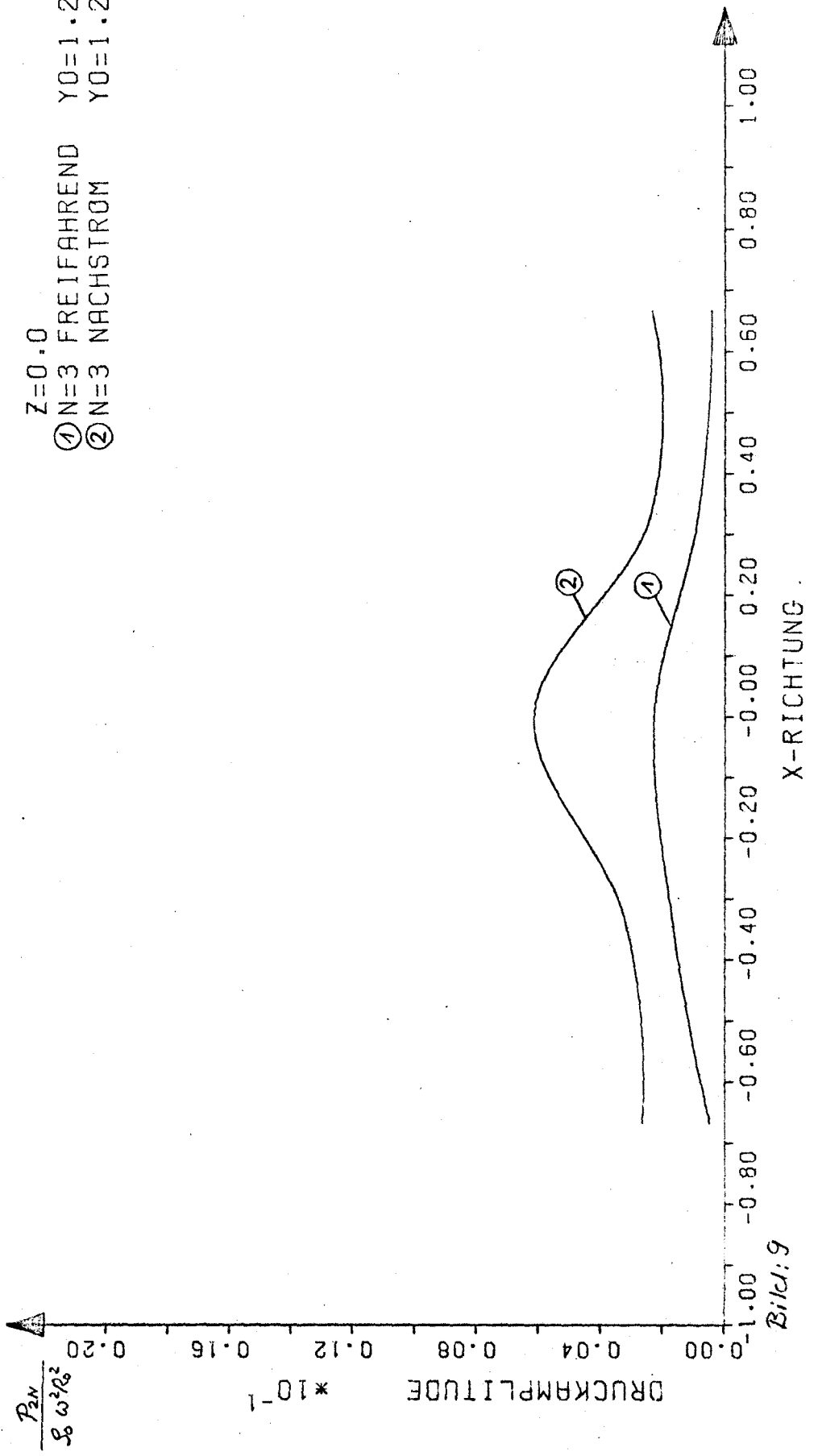


Bild: 9

2. HARMON. DES ANREGENDEN DRUCKFELDES

$$\frac{P_{2N}}{S_0 \omega^2 R_0^2}$$

DRUCKAMPLITUDE * 10⁻¹

X=0.0
① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
② N=3 NACHSTROM Y0=1.2

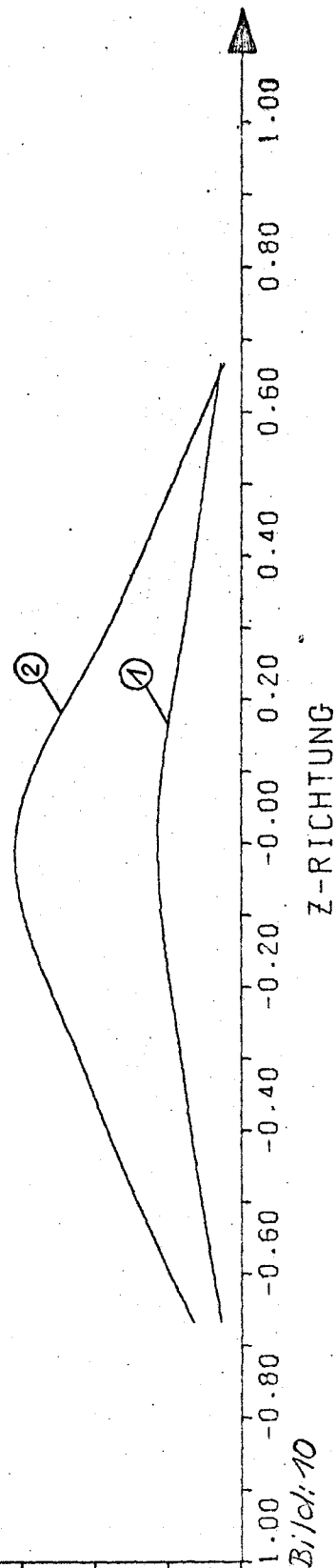


Bild: 10

Z-RICHTUNG

1. HARMON. DER AUSLENKUNGSGESCHW.

$\frac{V_{1H}}{\omega R}$
 GESCHW. AMPLITUDE * 10⁻¹

Z=0.0	① N=3	FREIFAHREND	Y0=1.2
	② N=3	NACHSTROM	Y0=1.2
	③ N=4	NACHSTROM	Y0=1.2
	④ N=4	NACHSTROM	Y0=1.4

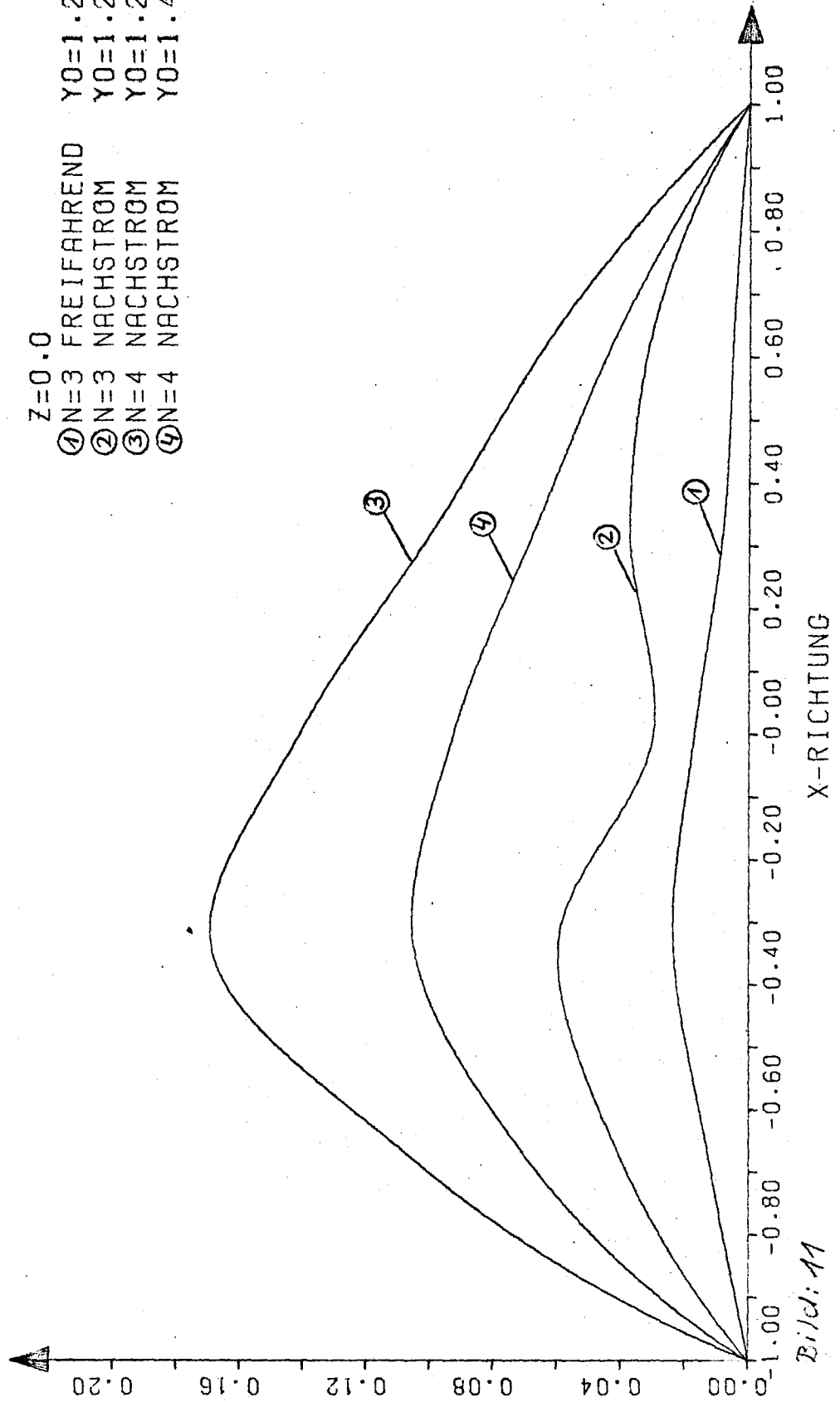
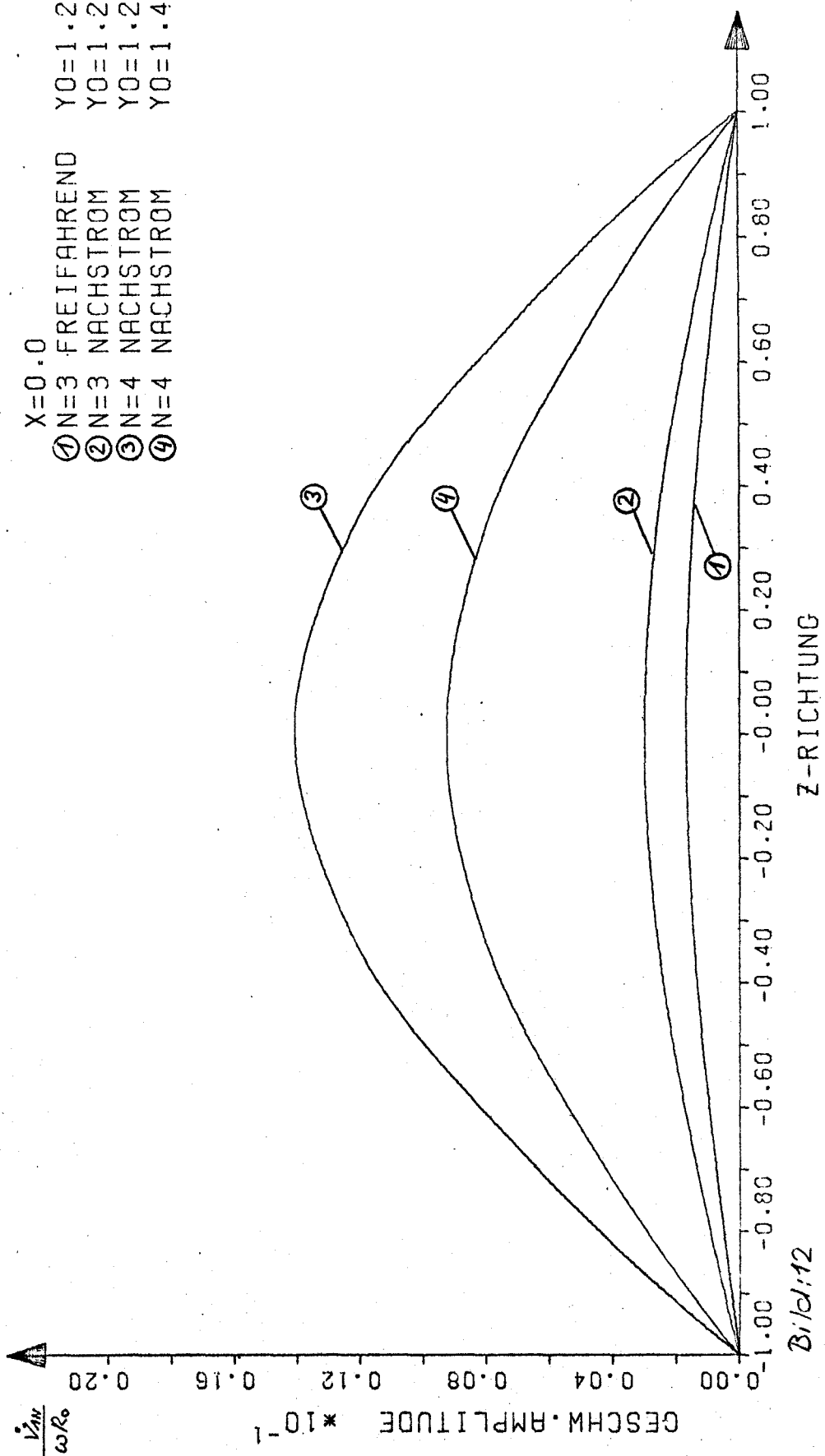


Bild: 11

1. HARMON. DER AUSLENKUNGSGESCHW.

$\frac{\dot{V}_{sw}}{\omega R_0} \cdot 10^{-1}$
 GESCHW. AMPLITUDE * 10⁻¹
 Z-RICHTUNG
 Bild: 12

- X=0.0
 ① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
 ② N=3 NACHSTROM Y0=1.2
 ③ N=4 NACHSTROM Y0=1.2
 ④ N=4 NACHSTROM Y0=1.4



2. HARMON. DER AUSLENKUNGSGESCHW.

Z=0.0
① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
② N=3 NACHSTROM Y0=1.2

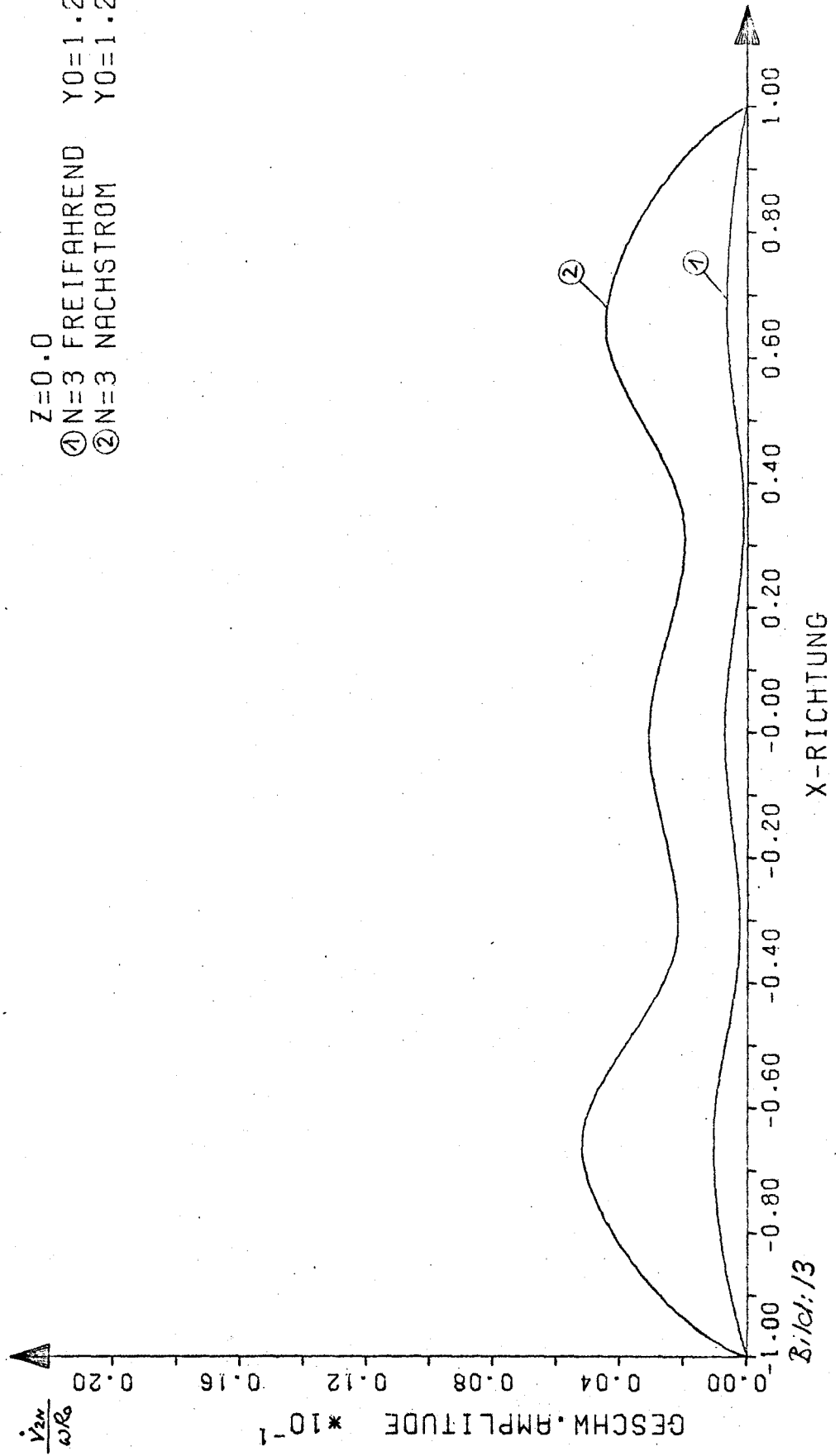


Bild: 13

2. HARMON. DER AUSLENKUNGSGESCHW.

$$\frac{\dot{V}_z}{\omega R}$$

GESCHW. AMPLITUDE * 10⁻¹

X=0.0
① N=3 FREIFAHREND Y0=1.2
② N=3 NACHSTROM Y0=1.2

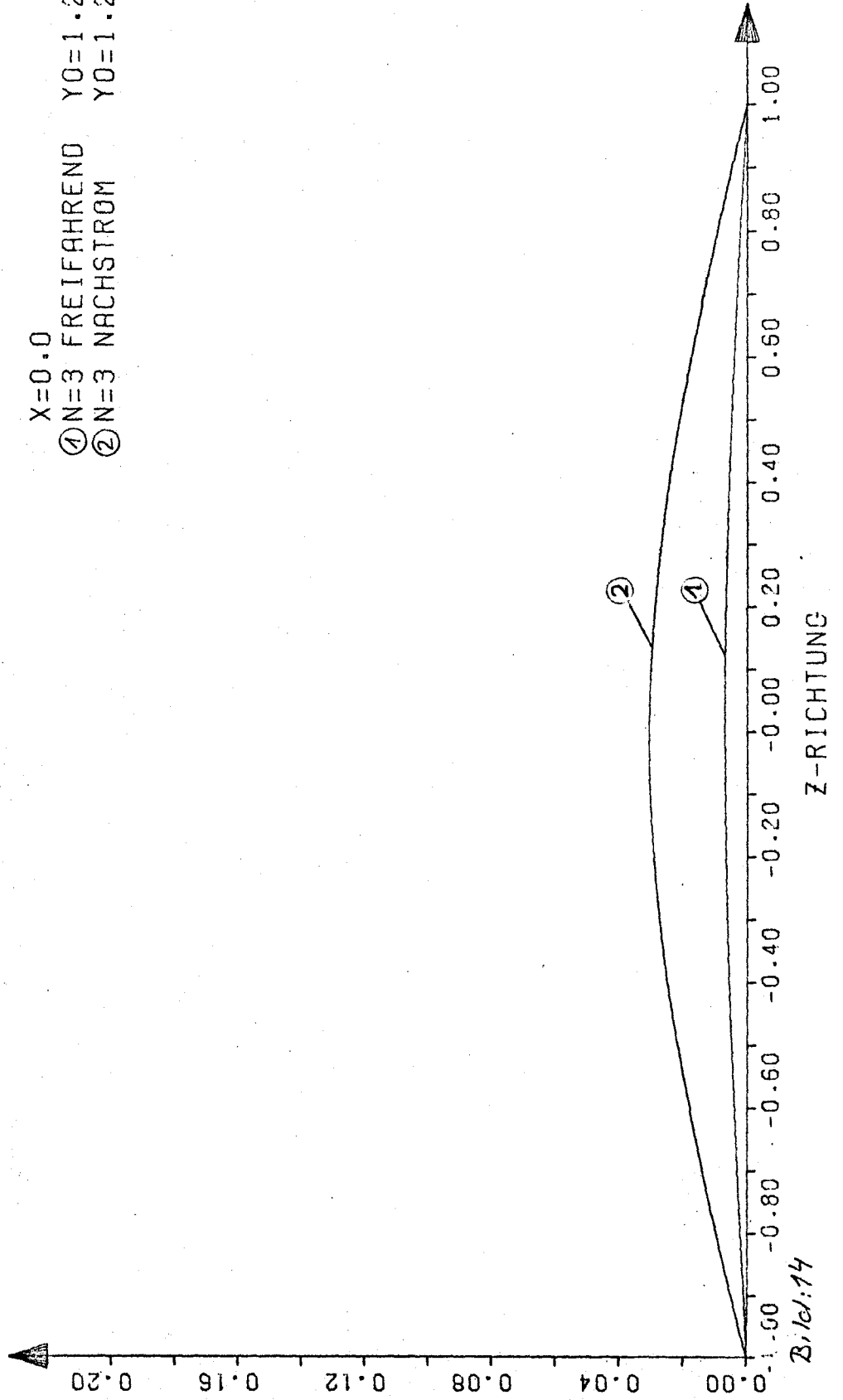


Bild: 14

1. HARMON. DES FERNFELDES

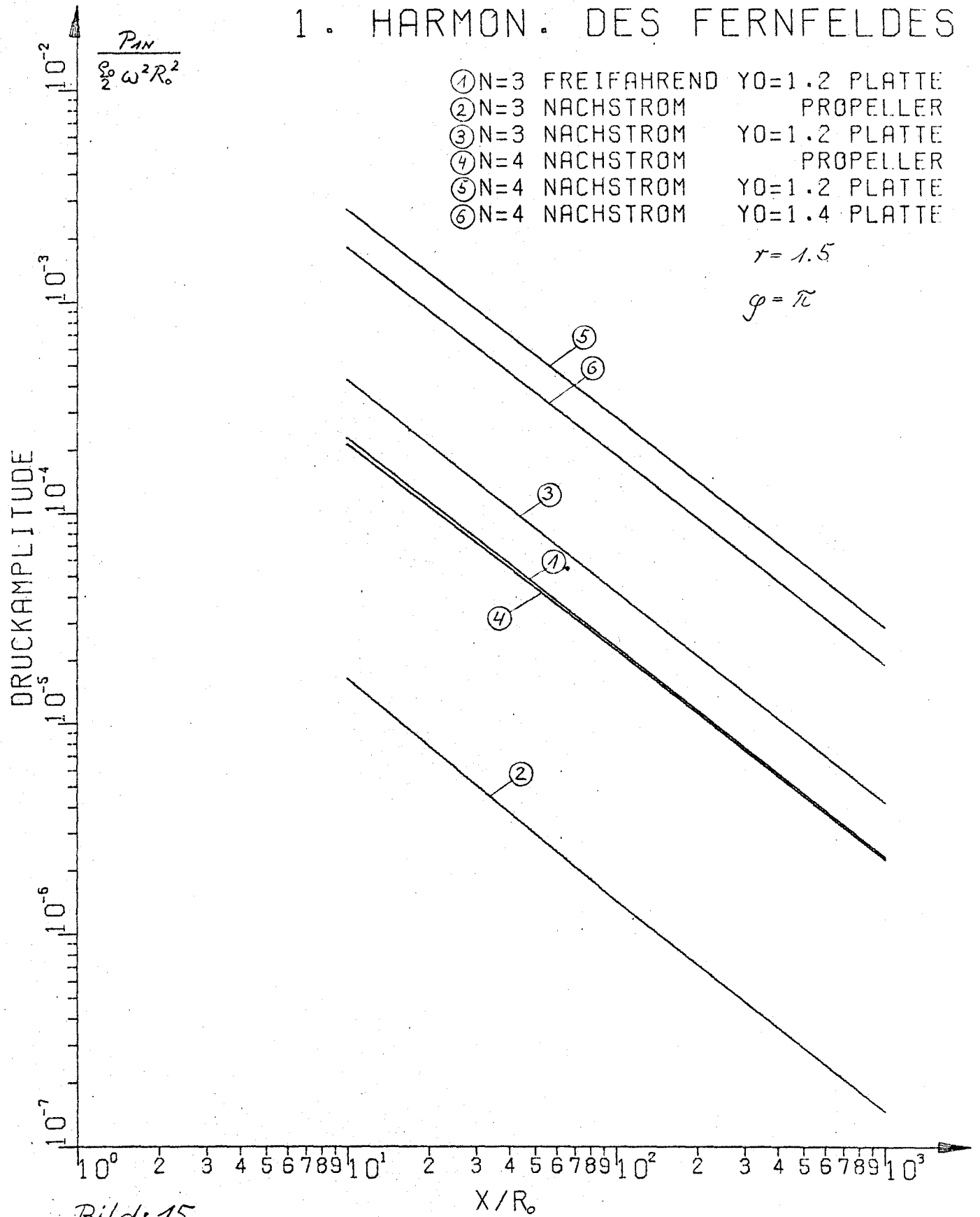


Bild: 15

1. HARMON. DES FERNFELDES

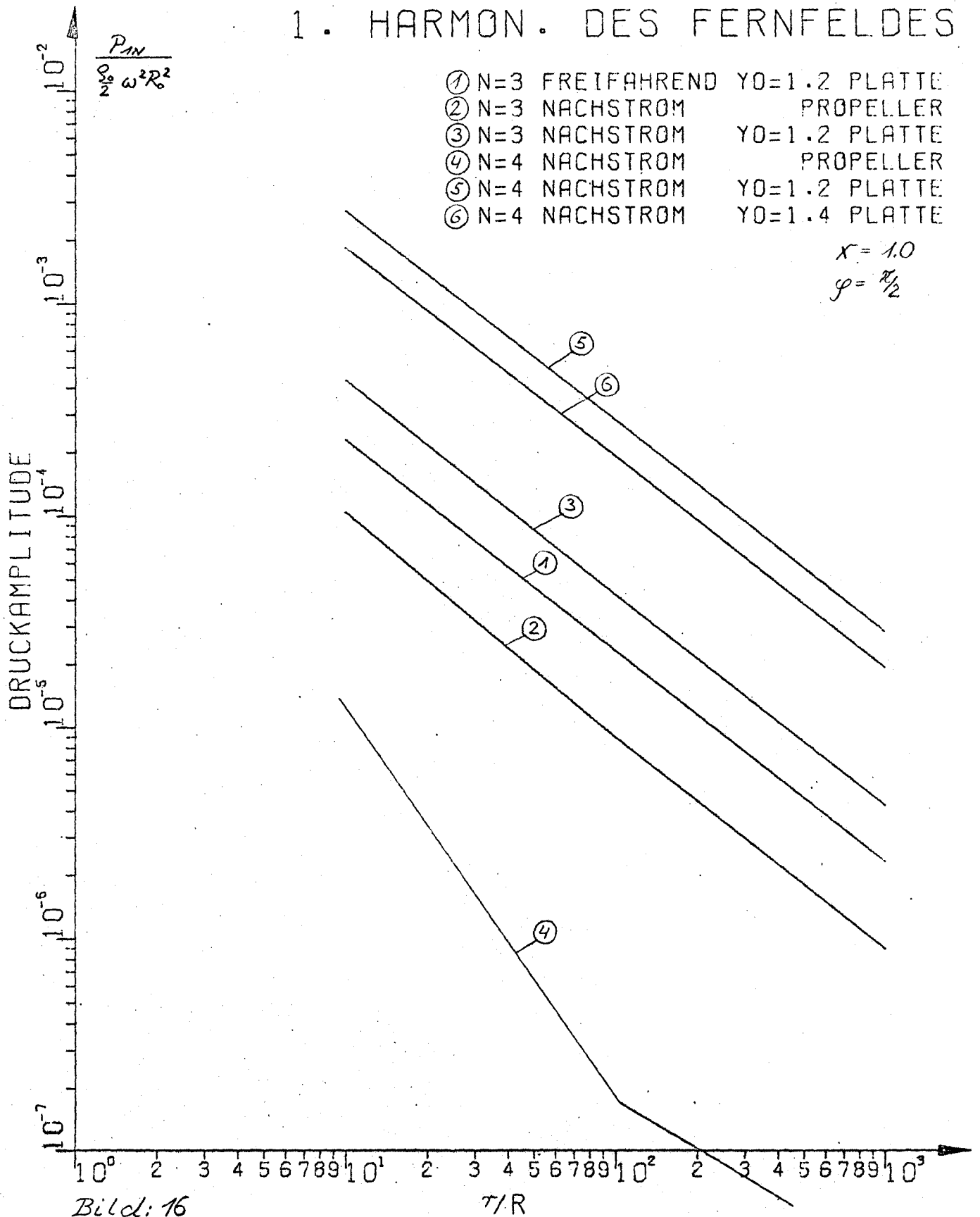


Bild: 16

2. HARMON. DES FERNFELDES

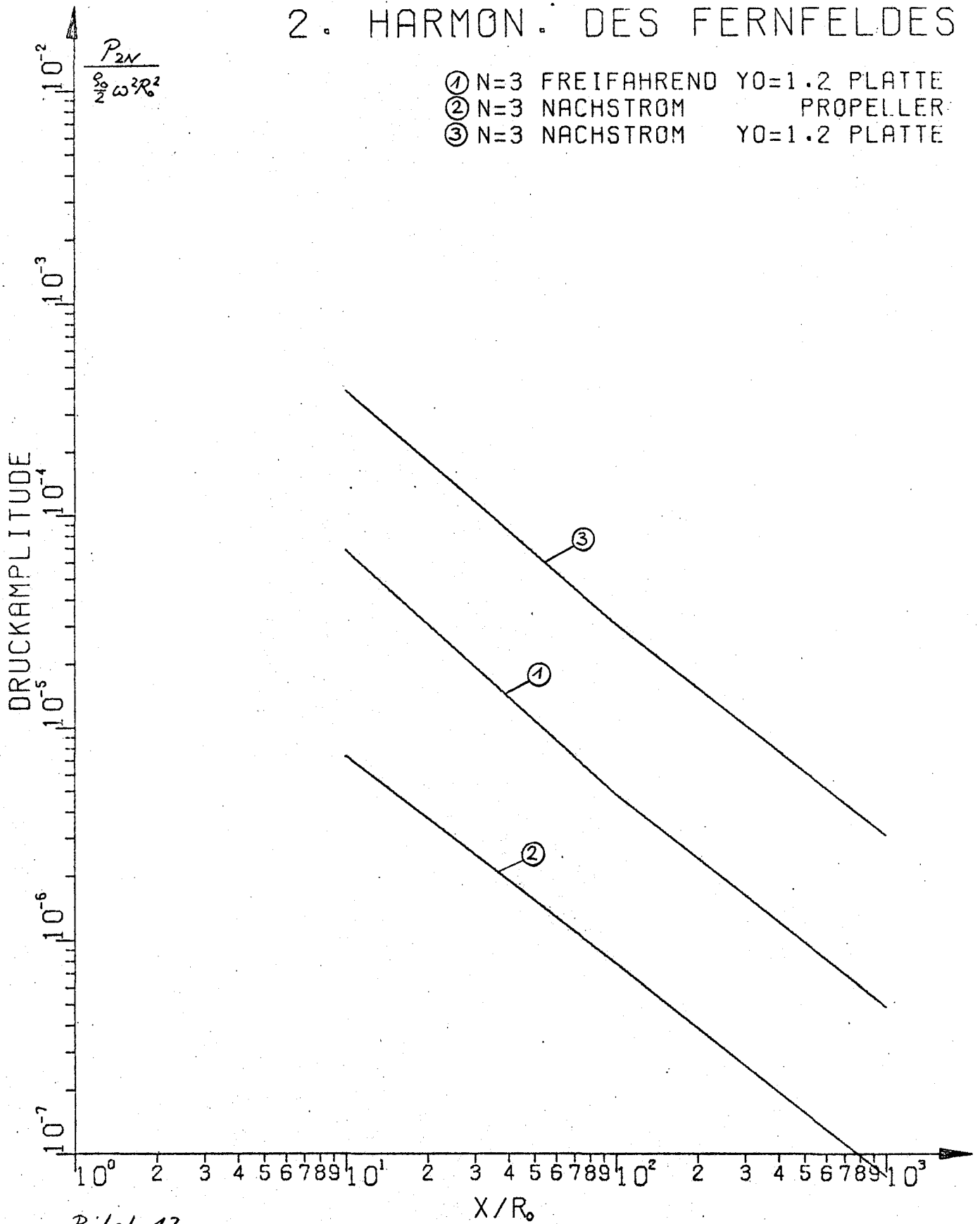


Bild: 17

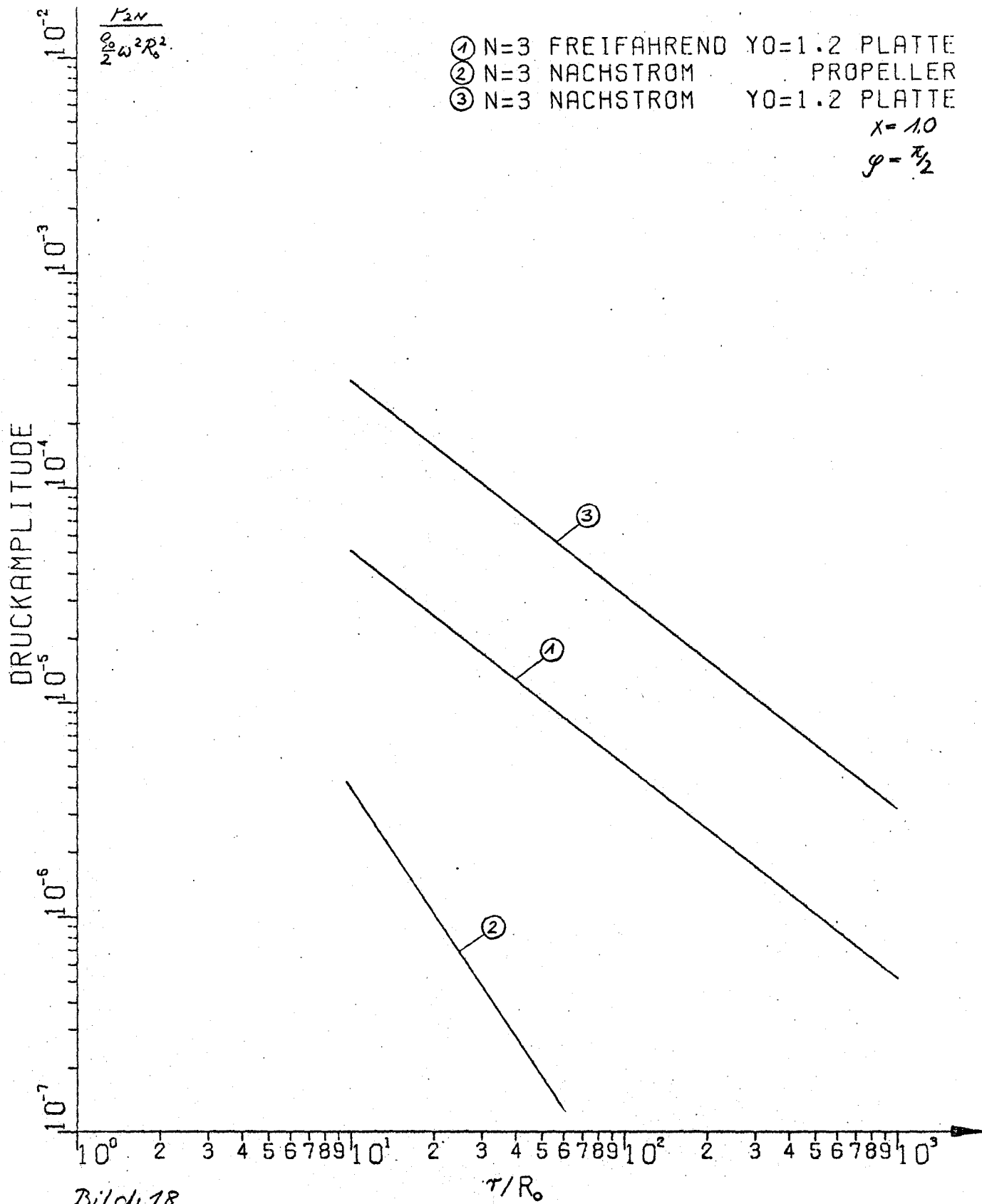
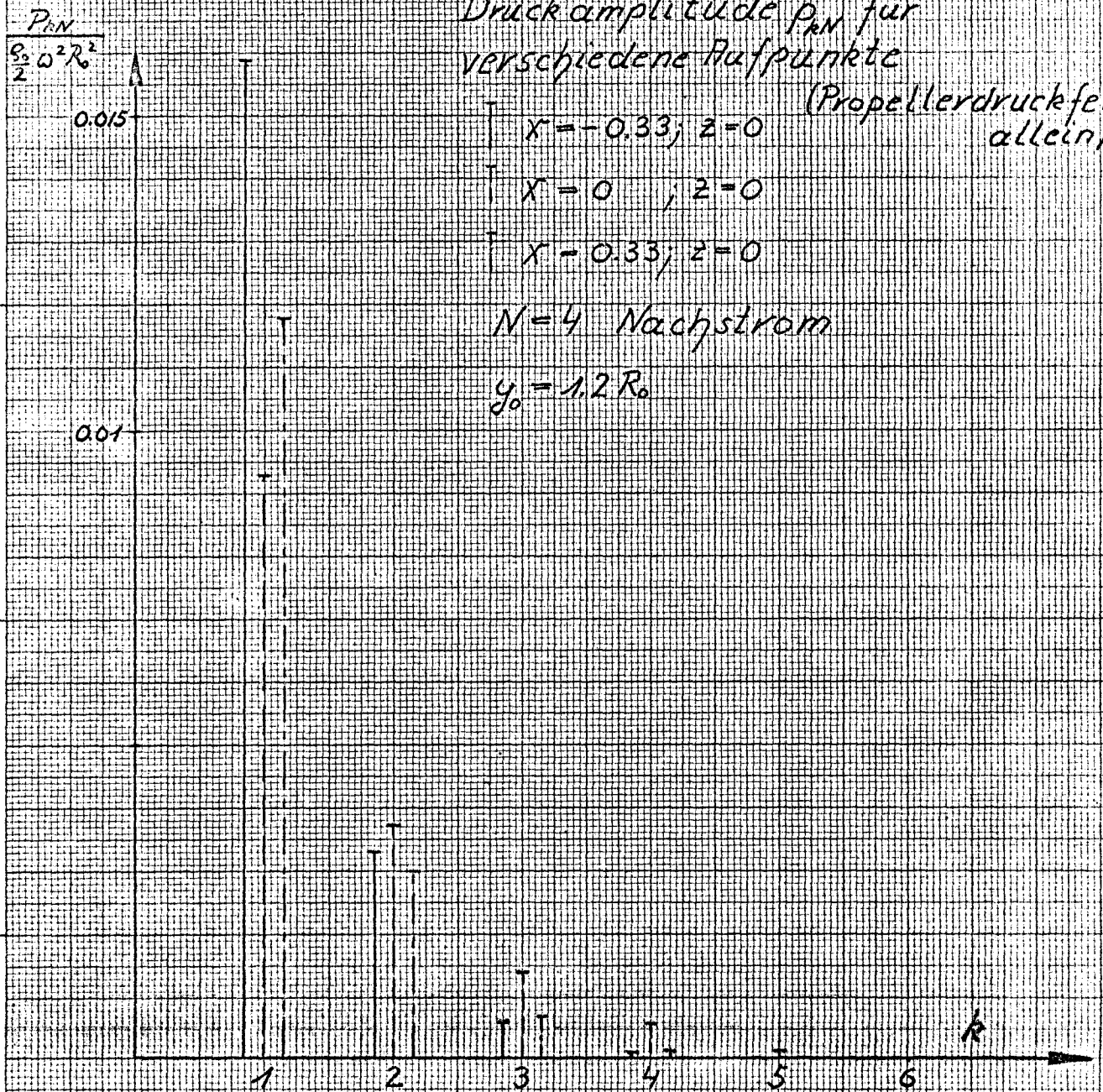


Bild 18



Druckamplitude p_{kN} für
 verschiedene Aufpunkte
 (Propellerdruckfeld
 allein)

$x = -0.33; z = 0$

$x = 0; z = 0$

$x = 0.33; z = 0$

$N = 4$ Nachstrom

$y_0 = 1.2 R_0$

Bild: 19

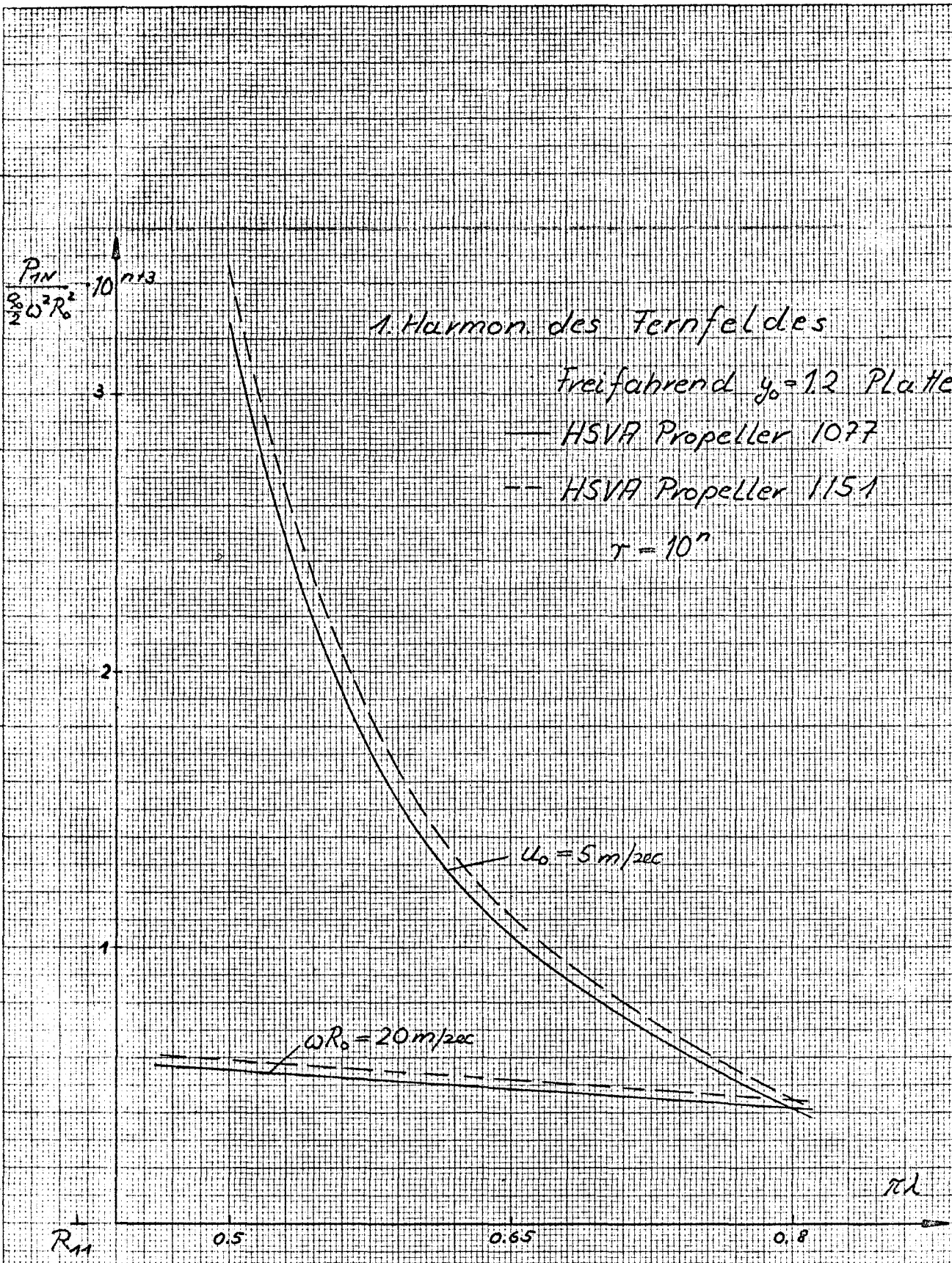


Bild: 20

DRUCKFELD EINES RUECKWAERTS GEPFEILTEN PROPELLERS

N=3 FREIFAHREND Y0=1.2 Z=0.

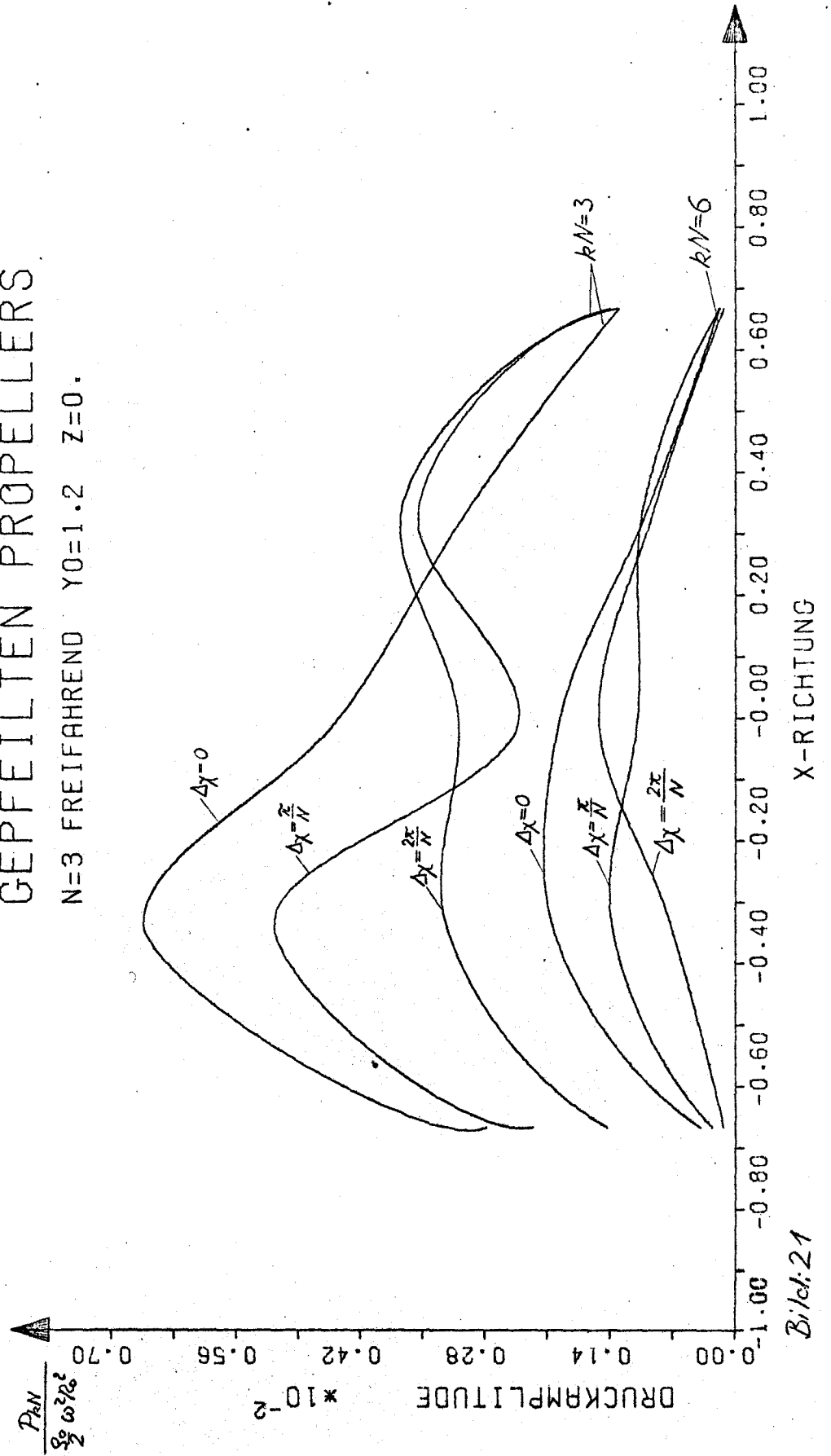


Bild: 21

DRUCKFELD EINES RUECKWAERTS GEPFEILTEN PROPELLERS

N=3 FREIFAHREND Y0=1.2 X=0.

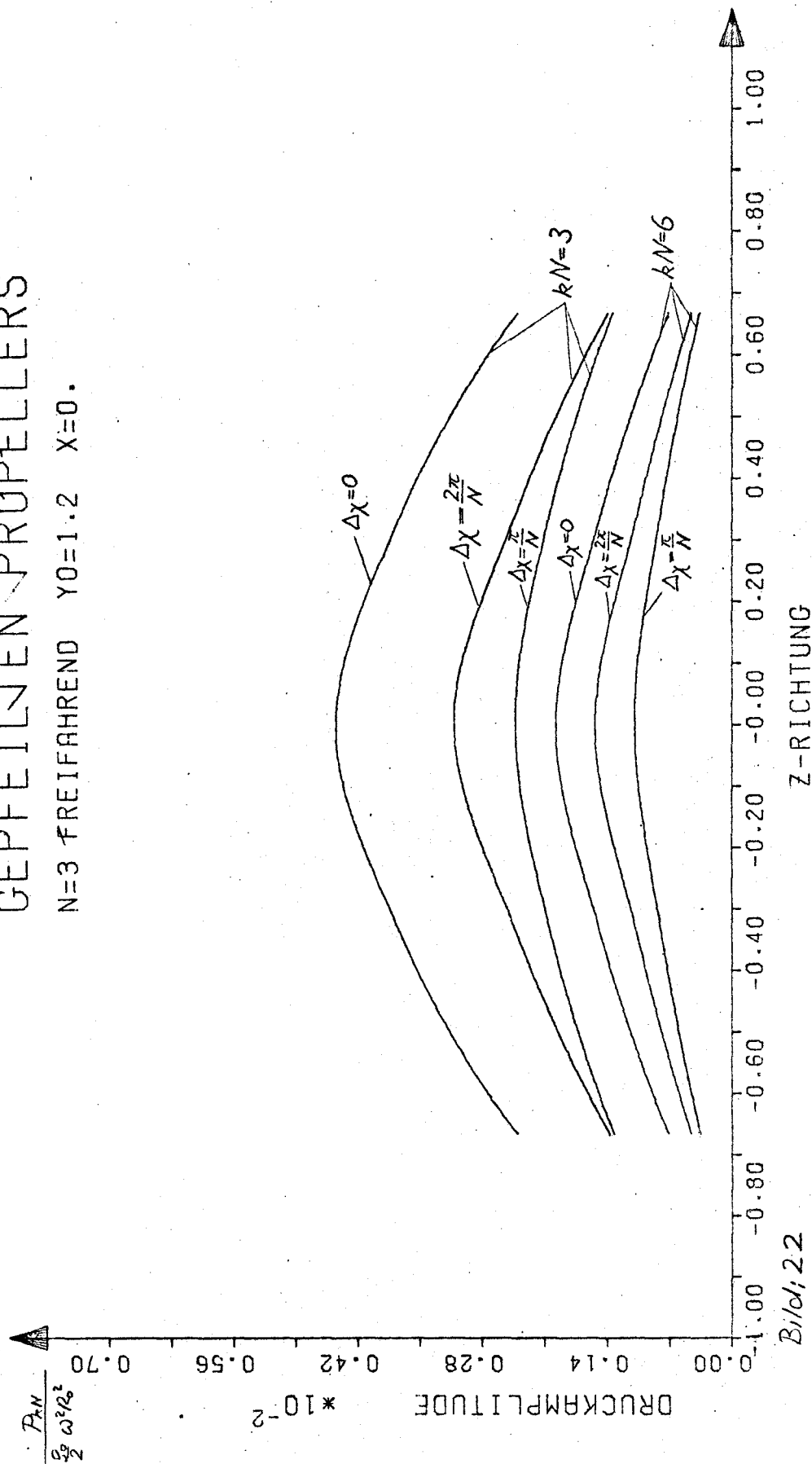


Bild 2.2

FERNFELD

N=3 FREIFAHREND $\gamma_0=1.2$ PLATIE

$$\gamma = 1.5$$

$$\varphi = \pi$$

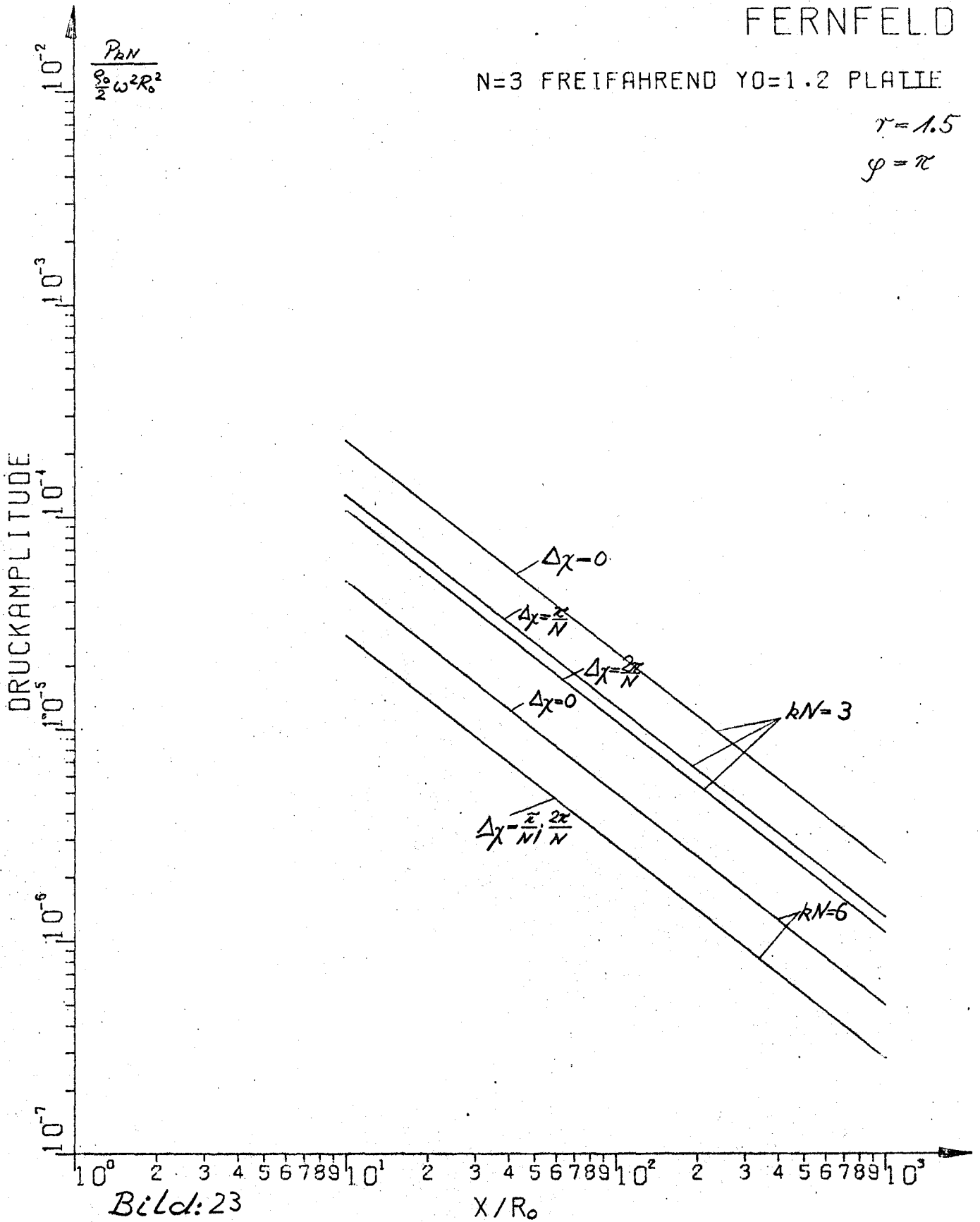


Bild: 23

FERNFELD

$N=3$ FREIFAHREND $Y_0=1.2$ PLATTE

$$\chi = 1.0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

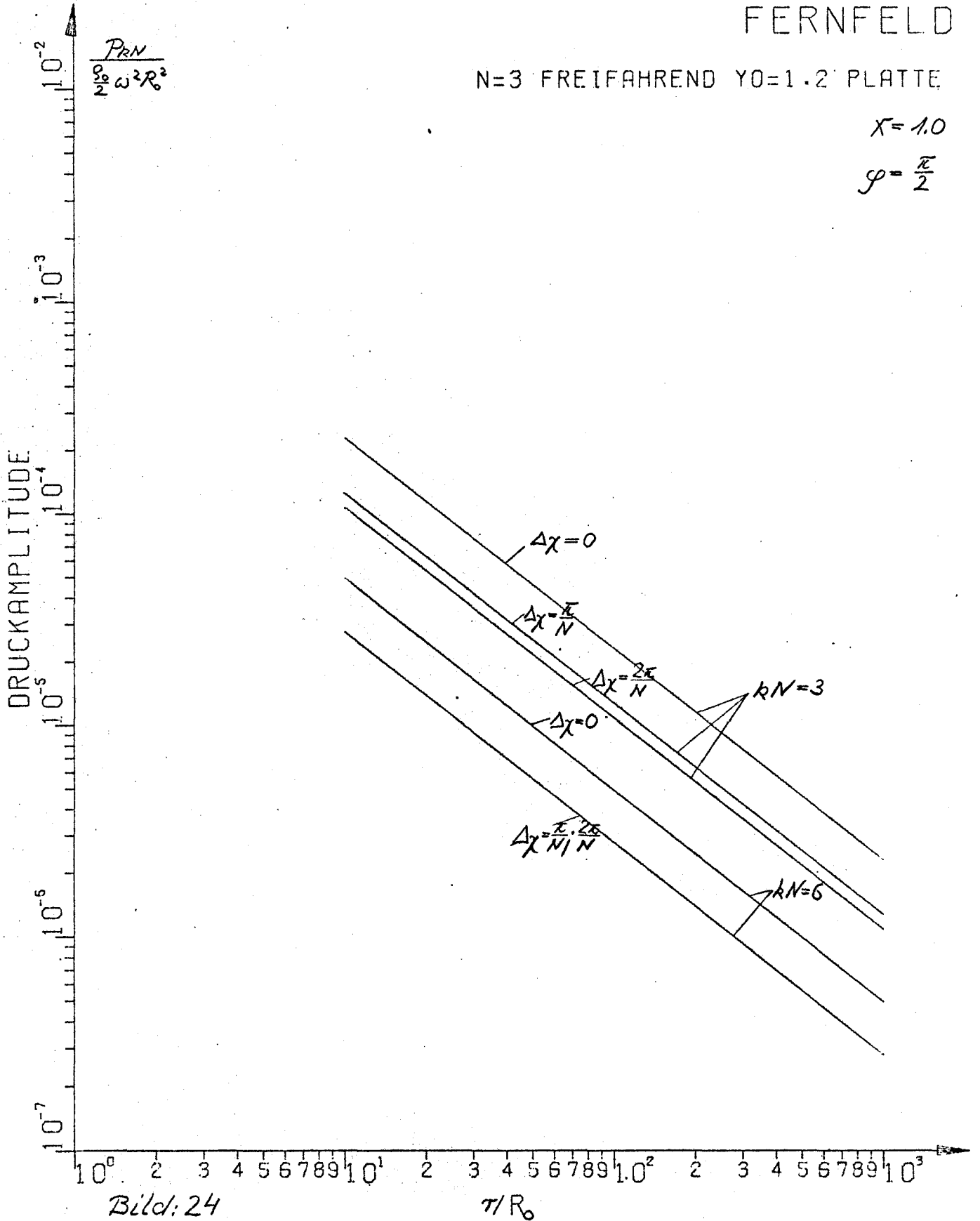


Bild: 24

