

91 | September 1962

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

O. Krappinger

Über Kenterkriterien

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Über Kenterkriterien

O. Krappinger

Einführung

Seit der Zeit, zu der man begann, die Erkenntnisse der Physik und Mechanik auch im Schiffbau anzuwenden, bemüht man sich, Kriterien zu finden, die zeigen, ob ein Schiff sicher gegen Kentern ist. Der erste Schritt auf diesem Wege war die Einführung des Metazentrums durch Bouguer (1746). Der oft zitierte Unfall des Monitors „Captain“ (1870) war der Anlaß, daß man begann, im Rahmen des Entwurfs neuer Schiffe auch die Kurven der aufrichtenden Hebel zu berechnen.

Die metazentrische Höhe und Hebelarmkurve reichen aus, um für Schiffe in glattem Wasser feststellen zu können, ob sie unter der Wirkung statisch oder dynamisch aufgebrachter krängender Momente eine gefährliche Neigung annehmen (bei der z. B. Öffnungen zu Wasser kommen) oder kentern. Auch die vorkommenden krängenden Momente können für diesen Fall (wenn nicht durch Rechnung, so doch auf experimentellem Wege) recht genau vorherbestimmt werden. Es gibt deshalb nur sehr wenige Fälle, in denen Schiffe in glattem Wasser gekentert sind. Die Ursache für solche Kenterfälle ist fast immer feststellbar. Meist stellt sich hinterher auch heraus, daß diese Unfälle bei etwas mehr Voraussicht vermeidbar gewesen wären. Bei Schiffen im glatten Wasser kann man also wohl nicht von einem „Stabilitätsproblem“ sprechen.

Ganz anders liegen die Verhältnisse für Schiffe, die Sturm und Seegang ausgesetzt sind. Viele der hierbei möglichen krängenden Momente und insbesondere ihre Kombinationsmöglichkeiten sind nicht im voraus zu überschauen (z. B.: Wind, Überkommen von Wasser, Übergehen von Ladung infolge der Schiffsbewegungen). Hinzu kommt noch der Einfluß des Seegangs. Die hiermit zusammenhängenden Probleme sind noch nicht befriedigend gelöst. Um trotzdem etwas über die Bedingungen aussagen zu können, unter denen ein Schiff Gefahr läuft zu kentern, sind in den letzten hundert Jahren häufig hypothetische Kenterkriterien vorgeschlagen worden (z. B. [1] bis [6]).

Die heute benutzten Kriterien kann man in drei Gruppen einteilen. Nach Merkmalen des Vorgehens werden sie hier als

1. Statistische Methode
2. Quasistatische Methode
3. Dynamische Methode

bezeichnet.

1. Statistische Methode: Wohl am häufigsten wird heute an Hand der Kurve der Hebel der aufrichtenden Momente für glattes Wasser beurteilt, ob ein Schiff ausreichend sicher gegen Kentern ist. Man stellt dabei fest, ob die Hebelarme des zu beurteilenden Schiffes größer sind als „Mindesthebelarme“. Die Mindesthebel kennt man aus der Erfahrung; d. h. man weiß, daß ähnliche Schiffe mit kleineren Hebelarmen gekentert sind, mit größeren Hebeln sich aber bewährt haben¹⁾.

¹⁾ Es handelt sich allerdings meist nicht um unmittelbare Erfahrungen. Auch der Vergleich mit Mindesthebeln wird nicht immer explizite, sondern häufig „gefühlsmäßig“ durchgeführt.

Die Erfahrung kann hier als eine primitive Form der Statistik aufgefaßt werden. Rahola hat dieser Statistik eine etwas mathematischere Form gegeben [6]. Durch Anwendung der Methoden der mathematischen Statistik ließen sich hier bestimmt noch Verbesserungen erzielen.

Einige Nachteile können allerdings nicht behoben werden, weil sie in der Natur der Sache liegen: Man kann das Verfahren nur auf Schiffe anwenden, die zu dem Kollektiv gehören, für das die Kenterstatistik gilt. Um möglichst „richtige“ Mindesthebel zu erhalten, muß man das Kollektiv aus möglichst gleichen Schiffen zusammensetzen. Damit wird auch der Anwendungsbereich klein bzw. man benötigt die Mindesthebel für verschiedene Kollektive. Für Spezialschiffe (z. B. Fähren, Fahrgastschiffe, Kriegsschiffe) wird man kaum genügend große Kollektive finden. Ferner kommt man auf diese Weise auch zu keinen ins einzelne gehenden Informationen. Theoretisch wäre es zwar denkbar, aus einer großen Zahl von Kollektiven jeweils verschiedener Schiffe nähere Zusammenhänge (z. B. zwischen Mindesthebeln und Abmessungsverhältnissen und Form der Schiffe, Windangriffsfläche und dergl. mehr) zu bestimmen. Praktisch scheidet dies aber daran, daß die dazu nötigen Statistiken nicht zu beschaffen sind.

Die Methoden 2 und 3 unterscheiden sich gegenüber der eben beschriebenen in erster Linie dadurch, daß dabei versucht wird, die einzelnen krängenden Momente sowie den Einfluß des Seegangs explizite zu erfassen. Der Seegang wird dabei in verschiedener Weise berücksichtigt.

2. Quasistatische Methode: Für die Lage des Schiffes auf Wellenberg bzw. im Wellental (siehe Bild 1) ergeben sich andere aufrichtende Momente als für das Schiff in glattem Wasser (siehe z. B. [7], [8]). Nimmt man an, daß der Einfluß des Seegangs im Hinblick auf die Sicherheit gegen Kentern schon ausreichend berücksichtigt wird, wenn man nur die Glattwasser-Hebelarme durch die für Seegang ersetzt²⁾, so ist das schwierige Problem der Kentersicherheit von Schiffen im Seegang im wesentlichen auf die einfache Frage zurück-

²⁾ Es wird hier nicht weiter darauf eingegangen, ob die Hebelarme für die Lage des Schiffes auf Wellenberg oder Mittelwerte aus Wellenberg und -tallage zu nehmen sind.

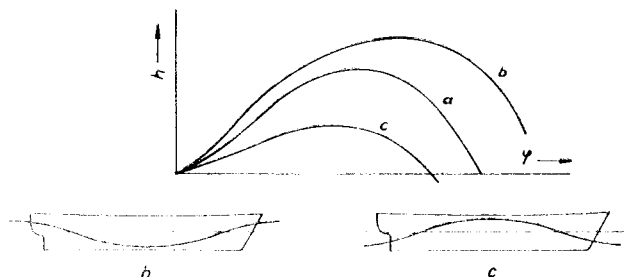


Bild 1 Hebelarme des aufrichtenden Moments
a für Schiff in glattem Wasser
b für Schiff im Wellental
c für Schiff auf Wellenberg

geführt, unter welchen Bedingungen ein Schiff in glattem Wasser kentert. Sie kann durch Gegenüberstellen der aufrichtenden und krängenden Momente beantwortet werden (vergl. [9], [13]). Diese Methode wurde erstmals von Wendel angewandt (siehe auch [10], [11], [12]).

3. Dynamische Methode: Von verschiedenen Aufsichtsbehörden (z. B. Ministry of Transport of Japan, Register der UdSSR) wird gefordert, daß bei der Beurteilung der Kintersicherheit auch die vom Seegang herrührenden Rollschwingungen zu berücksichtigen sind (siehe z. B. die Übersicht in [14] sowie [15], [16]). Als Kriterium dient eine Energiebilanz (vergl. Bild 2). Die Änderung des aufrichtenden Moments infolge des Seegangs wird hierbei nicht berücksichtigt.

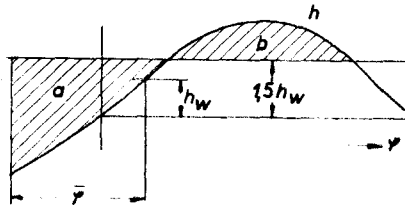


Bild 2 Energiebilanz
 h aufrichtende Hebel für Schiff in glattem Wasser
 h_w krängende Hebel von Winddruck
 $1,5 h_w$ krängende Hebel von Winddruck und Böen
 φ kritischer Rollwinkel
 Das Schiff wird als sicher angesehen, wenn für Flächen $a/b < 1$ gilt

Keines dieser Kriterien ist ganz befriedigend. Nach Ansicht des Verfassers enthalten aber alle drei Methoden brauchbare Ansätze zur Lösung des Problems. Es liegt deshalb nahe, zu versuchen, durch eine geeignete Kombination der den drei Verfahren zugrunde liegenden Gedanken einen Fortschritt zu erzielen. Es ist wohl selbstverständlich, daß dabei nicht nur von den Verfahren in der Form, in der sie praktisch angewandt werden, ausgegangen wird, sondern daß auch einschlägige mehr theoretische Untersuchungen berücksichtigt werden.

Der Kentervorgang

Wir wollen uns nun ein Schiff vorstellen, das in achterlichem (natürlichen) Seegang fährt. Auf das Schiff wirke ein bestimmtes krängendes Moment (etwa durch Winddruck oder übergegangene Ladung). Das Schiff rollt und kentert schließlich.

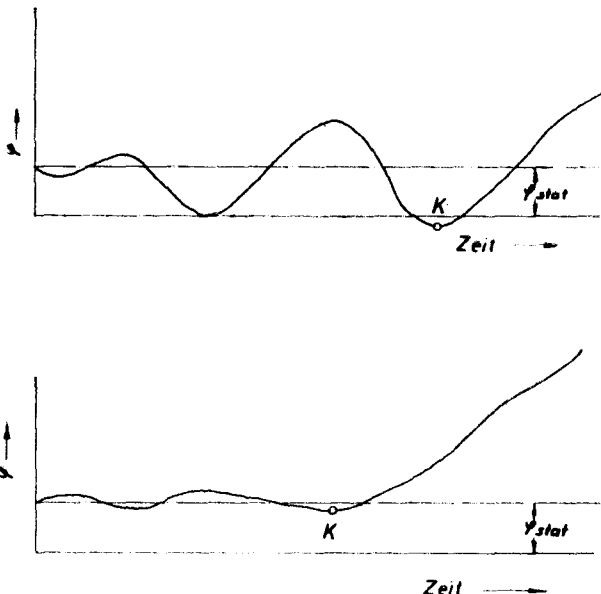


Bild 3 Kentervorgang
 Die Bilder zeigen qualitativ den Verlauf des Rollwinkels über der Zeit. Sie gelten für verschiedene Geschwindigkeit

Hätte man die Rollbewegungen des Schiffes gemessen und aufgezeichnet, so könnte der Meßschrieb etwa so wie in einem der in Bild 3 gezeichneten Beispiele aussehen. Wir fragen nun, was wohl die Ursache dafür ist, daß sich das Schiff gerade von der letzten Roll-Amplitude nach Luv an immer weiter nach Lee geneigt und nicht mehr aufgerichtet hat. Wenn wir annehmen, daß sich das krängende Moment nicht geändert hat, können wir nur den Seegang dafür verantwortlich machen. Wir wollen deshalb den Einfluß des Seegangs in dieser Phase des Kenterns etwas eingehender betrachten und dabei versuchen, irgendwelche Kriterien zu finden, die zeigen, wann nach einem Rollauschlag nach Luv Kentern zu erwarten ist.

Messungen des aufrichtenden Moments in regelmäßigen Wellen haben gezeigt, daß es periodisch um einen Mittelwert schwankt (Bild 4, [7], [8]). Die Schwankungen sind am größten, wenn die Wellenlänge etwa gleich der Schiffslänge ist. Man begeht sicher keinen allzugroßen Fehler, wenn man für die relativ kurze Zeit des Kenterns (die Kenterzeit wird vom Punkt K in Bild 3 an gerechnet) die Schwankung des Moments infolge des natürlichen Seegangs durch ein harmonisch um einen Mittelwert schwankendes Moment annähert und annimmt, daß die Periode T_0 der Schwankung etwa gleich der Begegnungsperiode des Schiffes mit Wellen ist, deren Länge gleich der Schiffslänge ist. Zu einem ähnlichen Ergebnis wären wir auch gekommen, wenn wir den natürlichen Seegang für den betrachteten kritischen Zeitraum durch eine regelmäßige Welle (Wellenlänge gleich Schiffslänge) angenähert und dafür die Schwankung des Moments bestimmt hätten. Die Amplitude der Schwankung des Moments ist für ein bestimmtes Schiff eine Funktion der Höhe der Welle.

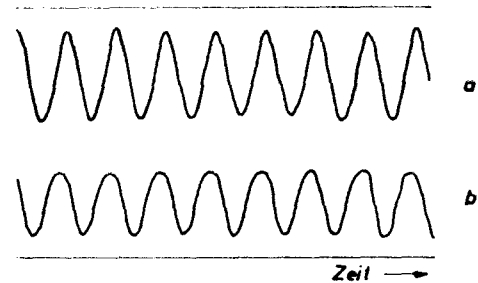


Bild 4 Schwankung des aufrichtenden Moments in regelmäßigem Seegang

a Wellenhöhe am vorderen Lot
 b Moment bei einer Neigung von 40°
 (Oszillogramm nach Paulling [8])

Unter den gemachten Voraussetzungen kann die Bewegung des Schiffes vom Punkt K (vergl. Bild 3) an durch die Differentialgleichung³⁾

$$J' \ddot{\varphi} + W \dot{\varphi} + D \left[h(\varphi) + \Delta h(\varphi) \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varepsilon\right) \right] = D h_{kr}(\varphi) \quad (1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0; \quad \varphi(0) = \varphi_K; \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

beschrieben werden. Die Lage des Schiffes bezüglich der Welle zur Zeit $t = 0$ wird durch ε (es ist $0 \leq \varepsilon < 2\pi$) gekennzeichnet.

Unter bestimmten Voraussetzungen (die praktisch meist erfüllt sind) über die Dämpfung, das krängende Moment sowie die Begegnungsperiode kann man mit Hilfe von Gleichung (1) für jedes ε und Δh sowohl Anfangsamplituden φ_K finden, bei denen das Schiff kentert als auch solche, bei denen sich das Schiff wieder aufrichtet. Damit das Schiff kentert, muß also eine bestimmte Rollamplitude zusammentreffen mit einer be-

3) Erklärung der Bezeichnungen am Schluß der Arbeit.

stimmten Lage des Schiffes im Seegang bzw. in der dem Seegang angenäherten Welle sowie einer bestimmten Höhe dieser Welle.

Die folgenden Bilder veranschaulichen diesen Zusammenhang an Hand von Beispielen. Bild 5 zeigt den Mittelwert h und die Amplituden der Schwankung der aufrichtenden Hebel sowie den krängenden Hebel h_{kr} (er ist der Einfachheit halber konstant angenommen). Aus Bild 6 ist die Bewegung des Schiffes für verschiedene Lagen ε und jeweils zwei Anfangsamplituden φ_0 und φ_K ersichtlich. Die φ_0 - bzw. φ_K -Werte sind so gewählt, daß sie den Grenzwert $\bar{\varphi}_K$, bei dem gerade Kentern eintritt, einschränken. Bild 7 und 8 zeigen die entsprechenden Kurven für ein Schiff mit größerer Schwankung des aufrichtenden Moments. Außerdem ist für diesen Fall eine doppelt so große Überholperiode angenommen worden.

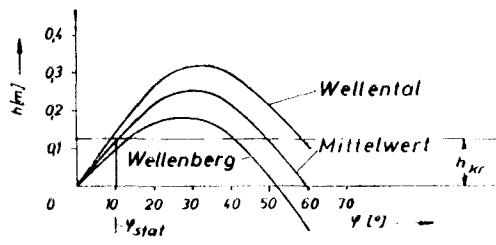


Bild 5 Hebelarme zu Bild 6

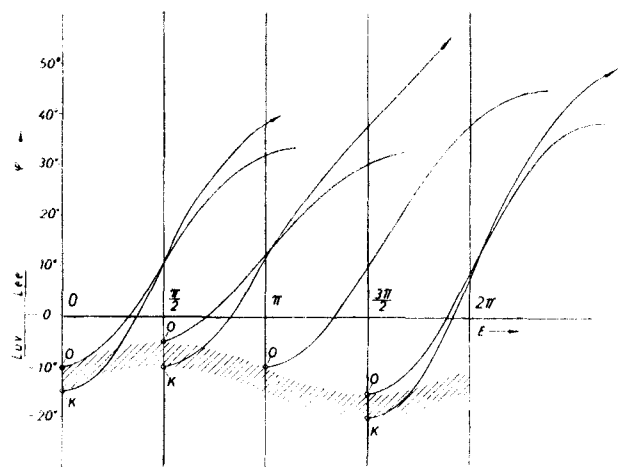


Bild 6 Kentern in achterlichem Seegang (Hebelarme nach Bild 5)

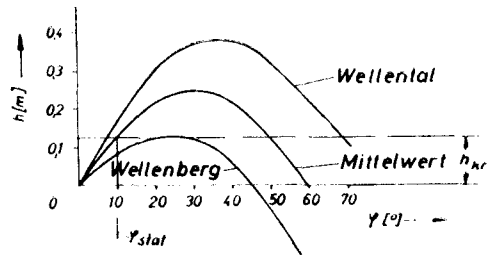


Bild 7 Hebelarme zu Bild 8

Ein neues Kenterkriterium

Vergleicht man die Grenzkurven bzw. Grenzstreifen der Rollamplitude in Bild 6 und 8, so wird man geneigt sein, das der Kurve in Bild 6 zugrundeliegende Schiff als sicherer anzusehen, da es nicht schon bei kleinen Neigungen aus der Gleichgewichtslage kentert. Dabei nimmt man allerdings an, daß die Rollbewegungen dieses Schiffes nicht wesentlich größer sind als die des Bild 8 zugrundeliegenden Schiffes. Man kann aber auch das Rollen berücksichtigen, indem man den Grenzkurven ein „kennzeichnende Rollamplitude“ $\bar{\varphi}$ gegenüberstellt (Bild 9). Auf die Frage, wie diese Rollamplitude am

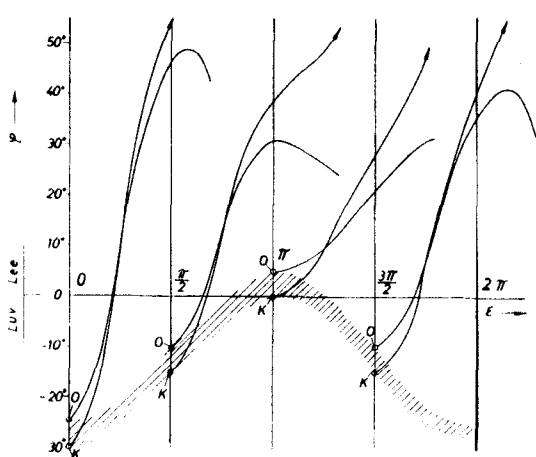


Bild 8 Kentern in achterlichem Seegang (Hebelarme nach Bild 7)

besten zu bestimmen wäre, wird hier nicht näher eingegangen. Es handelt sich hierbei um ein ähnliches Problem, wie es bei der oben erwähnten „Dynamischen Methode“ bereits mehr oder weniger gut gelöst worden ist.

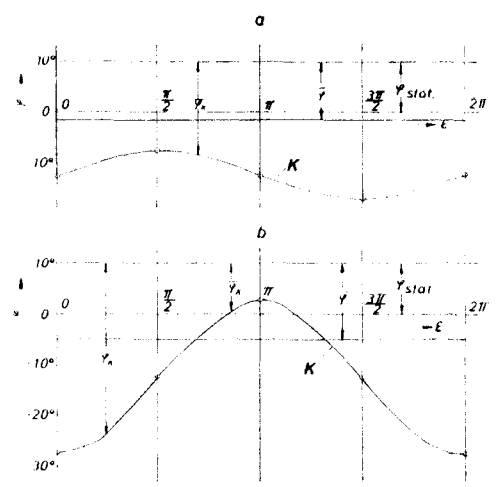


Bild 9 Beurteilung der Sicherheit gegen Kentern Schiff a ist sicherer als Schiff b

Wenn man die Kurve K (Bild 9) für die Momentenschwankung, die von der größten zu erwartenden Wellenhöhe (Wellenlänge gleich Schiffslänge) herrührt, bestimmt und auch für $\bar{\varphi}$ die größten zu erwartenden Rollamplituden nimmt, so wird bei manchen Schiffen für einen Teil der Überholperiode $|\bar{\varphi}| > |\bar{\varphi}_K|$ (vergl. Bild 9) sein. Das bedeutet nun aber nicht, daß ein Schiff, bei dem dies der Fall ist, kentern muß. Es ist ja unwahrscheinlich, daß solche extrem großen Wellen und Rollauschläge gleichzeitig und in bestimmter zeitlicher Zuordnung auftreten. Man kann aber wohl annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für einen kritischen Zustand, der zum Kentern führt, um so größer ist, je größer der Bereich innerhalb einer Rollperiode ist, in dem $|\bar{\varphi}| > |\bar{\varphi}_K|$ ist. Je größer diese Wahrscheinlichkeit ist, desto größer ist aber auch die Gefährdung eines Schiffes.

Man kann mit diesem Kenterkriterium ebenso wenig wie mit den bisher gebrauchten feststellen, ob ein Schiff kentert. Alle bekannten Kenterkriterien für Schiffe in Sturm und Seegang geben nur qualitativ an, ob ein Schiff mehr oder weniger gefährdet ist. Das hier vorgeschlagene Kriterium hat gegenüber den bekannten aber den Vorteil, daß damit besser als mit anderen die wirklichen Verhältnisse erfaßt werden.

Bevor es praktisch zu verwenden ist, müßten damit allerdings noch einige Erfahrungen gesammelt werden. Es ist aber

anzunehmen, daß die mit einem Schiffstyp gesammelten Erfahrungen bei diesem Verfahren besser auf andere Typen übertragbar sind als bei anderen Kriterien, einfach weil hierbei Einzelheiten des Kentervorgangs explizite berücksichtigt werden.

Ein Nachteil ist, daß es verhältnismäßig umfangreicher Rechnungen bedarf, um die Grenzkurve $\bar{\varphi}_K$ aufzustellen. Hierzu kann gesagt werden, daß man heute allerorts dabei ist, für solche Rechnungen moderne Rechenanlagen nutzbar zu machen. Ich glaube deshalb, daß in einigen Jahren der Umfang der Rechenarbeit in einem anderen Licht als heute erscheinen und kaum mehr als großes Hindernis angesehen werden wird.

Die Wahrscheinlichkeit für Kentern

Im vorstehenden Abschnitt wurde qualitativ von einer Wahrscheinlichkeit für Kentern als Maß für die Gefährdung eines Schiffes gesprochen. Hier soll untersucht werden, ob es nicht möglich ist, mit Hilfe des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes auch quantitative Aussagen über die Sicherheit gegen Kentern zu machen.

Zunächst ist es notwendig, das Problem einzugrenzen. Ein Schiff kann bereits beim Stapellauf kentern, ebenso beim Docken; auch wenn es aus irgendwelchen Gründen leck wird, kann es durch Kentern verloren gehen. Es scheint wenig sinnvoll, zu fragen, wie wahrscheinlich es ist, daß ein Schiff aus den eben genannten Gründen kentert. Auch die Frage, wie wahrscheinlich es ist, daß irgendwelche Ladung so schlecht gestaut wird, daß sie übergeht und das Schiff umkippt, hat meist wenig mit dem zu tun, was man in der Mathematik unter Wahrscheinlichkeit versteht. Schließlich ist auch der Fall guten Wetters ziemlich uninteressant: Die Wahrscheinlichkeit für Kentern ist hier bei normalen Seeschiffen etwa Null.

Einer (zumindest näherungsweise) mathematischen Behandlung zugänglich und auch so wirklichkeitsnah, um interessant genug zu sein, scheint folgende Fragestellung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schiff, das eine bestimmte Zeit T irgendeinem bestimmten noch näher zu beschreibenden Seegang ausgesetzt ist, kentert? Im Sinne der Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit nach v. Mises können wir diese Frage auch so formulieren: Eine große Zahl von genau gleichen Schiffen ist während der Zeit T einem bestimmten Seegang ausgesetzt. Wieviele dieser Schiffe kentern? Wir gehen dabei etwa von dem manchmal von Nautikern geschilderten Sachverhalt aus, daß ein Schiff in schwerem Wetter hart an die Grenze des Kentern gekommen ist, und daß „so etwas nur in einem von zehn Fällen gutgeht“. Es wird sich zeigen, daß solche oder ähnliche vielleicht gar nicht immer wörtlich gemeinte Formulierungen ziemlich treffend sind.

Zur Beantwortung der oben gestellten Frage machen wir Gebrauch von der von Pierson und St. Denis in unser Fachgebiet eingeführten statistischen Methode zur Darstellung unregelmäßigen Seegangs [17]. Eine zusammenfassende Übersicht über diese Methode in deutscher Sprache hat Bartsch gegeben [18]. Diese Arbeiten werden hier als bekannt vorausgesetzt.

Wir beschränken uns hier auf den Fall achterlichen zweidimensionalen Seegangs. Mit $z(x, t)$ wird die Höhe der Meeresoberfläche über einer bestimmten Nullebene an der Stelle x und zur Zeit t bezeichnet. $z(x, t)$ heißt Seegangsfunktion. Der als stationär vorausgesetzte Seegang wird als Überlagerung von voneinander unabhängigen harmonischen Elementarwellen dargestellt:

$$z(x, t) = \int_0^{\infty} \cos \left[\omega t - \frac{\omega^2}{g} x + \sigma(\omega) \right] \sqrt{2 S(\omega)} d\omega \quad (2)$$

Die Phasenverschiebung der einzelnen Wellen $\sigma(\omega)$ ist eine Zufallsgröße. Für jedes ω kann σ jeden Wert zwischen 0 und 2π mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen:

$$W(0 \leq \sigma(\omega) < 2\pi\alpha) = \alpha; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Es ist deshalb auch $z(x, t)$ eine Zufallsgröße, die bestimmten statistischen Gesetzen gehorcht. So sind z. B. die zu verschiedenen Zeiten an einem bestimmten Ort gemessenen Werte z normal⁴⁾ verteilt mit

$$\text{dem Mittelwert } E(z) = 0$$

$$\text{und der Streuung } E(z^2) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (3)$$

$S(\omega)$ heißt Seegangsspektrum. Es ist für stationären Seegang unabhängig von Zeit und Ort. Auch die zu einer bestimmten Zeit an verschiedenen Orten beobachteten Werte sind normal verteilt mit Mittelwert und Streuung nach (3). Gleichung (2) gilt auch, wenn man x von einem in Wellenrichtung bewegten Bezugspunkt mißt. Es muß dann für ω die Begegnungsfrequenz eingesetzt und auch das Spektrum entsprechend umgerechnet werden (siehe [17], [18].)

Aus dem als Summe von Elementarwellen dargestellten Seegang lassen sich Schiffsbewegungen und andere Größen berechnen, sofern sie linear von den Wellen abhängen. Man erhält für sie eine ähnliche Darstellung wie für den Seegang selbst. D. h., die vom Seegang erzeugten Größen sind ebenfalls Zufallsgrößen, für die ebenso wie für den Seegang bestimmte statistische Gesetzmäßigkeiten gelten.

Die aufrichtenden Momente eines in achterlichem Seegang fahrenden Schiffes kann man aber nicht durch Überlagerung der Elementarwellen des Seegangs entsprechenden Momente bilden. Lange Zeit schien es deshalb unmöglich, die von Pierson und St. Denis eingeführte Methode auch für unser Problem nutzbar zu machen. Es ist das Verdienst Grims, gezeigt zu haben, wie man auch auf diesem Gebiet weiterkommen kann [19].

Der Grundgedanke Grims besteht darin, die Wasseroberfläche neben dem Schiff durch eine hypothetische effektive Welle anzunähern, die ungefähr die gleiche Änderung der aufrichtenden Momente bewirkt wie der natürliche Seegang. Die Länge der effektiven Welle wird gleich der Schiffslänge

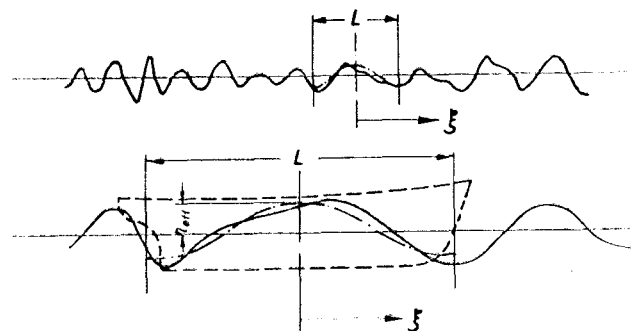


Bild 10 Erklärung der effektiven Welle (nach Grim [19])

gewählt, weil in diesem Fall die größten Momentenänderungen zu erwarten sind. Wellenberg bzw. -tal dieser Welle liegen auf Hauptspant. Die Amplitude der effektiven Welle η_{eff} wird so bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der effektiven Welle von der wirklichen Wasseroberfläche ein Minimum wird (vergl. Bild 10):

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \left\{ \int_0^{\infty} \cos \left[\omega t - \frac{\omega^2}{g} \xi + \sigma(\omega) \right] \sqrt{2 S(\omega)} d\omega - \left[a + \eta_{\text{eff}} \cos \frac{2\pi}{L} \xi \right]^2 d\xi = \text{Min!} \quad (4)$$

⁴⁾ Genauer: asymptotisch normal.

Nullsetzen der Ableitungen von Gleichung (4) nach a und η_{eff} ergibt

$$\eta_{\text{eff}}(t) = \int_0^{\infty} \cos[\omega t + \sigma(\omega)] \sqrt{2 S(\omega) \left[\frac{\frac{\omega^2 L}{g} \sin \frac{\omega^2 L}{g}}{\pi^2 - \left(\frac{\omega^2 L}{2g}\right)^2} \right]^2} d\omega. \quad (5)$$

Die Amplitude der effektiven Welle ist also ebenso eine Zufallsgröße wie der Seegang selbst.

Bevor wir uns weiter mit dem Seegang bzw. der effektiven Welle beschäftigen, wollen wir einige Überlegungen über die Wirkung dieser Welle auf ein Schiff anstellen. Wir nehmen zunächst an, daß es sich um ein verhältnismäßig schnelles Schiff handelt, bei dem die Überholperiode in Wellen, deren Länge etwa gleich der Schiffslänge ist, groß ist. Grim hat gezeigt, daß dann auch die mittlere Periode von η_{eff} groß wird. Weiter nehmen wir an, daß auf das Schiff ein krägendes Moment wirkt. Entsprechend den Werten, die η_{eff} annimmt, wird auch das aufrichtende Moment schwanken. Bei nicht sehr großen Werten η_{eff} wird das Schiff nur kleine Rollauschläge machen (vergl. Bild 11: Bei kleinen Werten η_{eff} wird das Schiff unter den gemachten Annahmen etwa zwischen φ_1 und φ_2 schwanken). Wenn η_{eff} jedoch genügend lange Zeit große Werte annimmt, kann das Schiff kentern. Es wirkt dann nämlich über einen großen Winkelbereich ein krägendes Moment (Differenz zwischen Kurven h_{Kr} und C in Bild 11).

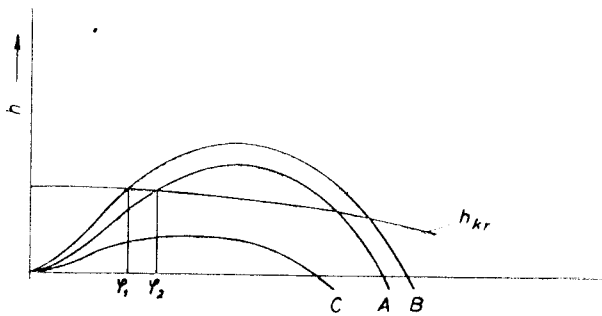


Bild 11 Hebelarme für verschiedene Amplituden von η_{eff}
 A (B) kleine positive (negative) Amplitude von η_{eff}
 C große positive Amplitude
 h_{Kr} Hebel des krägenden Momentes

Näherungsweise können wir annehmen, daß bei kleinen Werten η_{eff} das Schiff im Mittel etwa die gleiche Krängung hat wie in glattem Wasser. Wir stellen uns nun vor, daß nach einer Folge von kleinen Werten η_{eff} ein größerer auftritt und sich über eine längere Zeit nicht sehr stark ändert.

Es wirkt dann auf das Schiff ein krägendes Moment (Bild 12), das bewirkt, daß das Schiff kentert. Aus dem Ver-

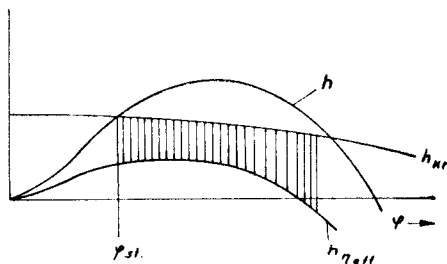


Bild 12 Hebel des resultierenden krägenden Momentes
 h aufrichtender Hebel für glattes Wasser
 η_{eff} aufrichtender Hebel für Schiff auf Wellenberg mit Amplitude η_{eff}
 h_{Kr} Hebel des krägenden Momentes

lauf des krägenden Moments kann die für das Kentern notwendige Zeit T_K berechnet werden. Die Berechnung von T_K ist allerdings mit Unsicherheiten behaftet: 1. wird das krägende Moment nicht plötzlich, wie in Bild 12 gezeichnet, auftreten; 2. ist es kaum möglich, den Winkel, bei dem das Schiff als gekentert anzusehen ist, genau festzulegen. Mangels besseren Wissens nehmen wir diese Unsicherheiten jedoch in Kauf.

Für jeden, eine bestimmte nicht zu kurze Zeit vorhandenen Wert der Amplitude der effektiven Welle erhalten wir eine andere Hebelarmkurve η_{eff} (Bild 12) und vorausgesetzt, daß das Schiff überhaupt kentert — eine andere Kenterzeit T_K . Umgekehrt gehört zu jeder Kenterzeit T_K auch eine bestimmte, mindestens über diese Zeit vorhandene Amplitude der effektiven Welle $\eta_{\text{eff}} = \eta_K$.

Die Amplitude der effektiven Welle η_{eff} ist aber mit der Zeit veränderlich. Um zu einem über ΔT konstant bleibenden Wert zu kommen, nehmen wir den Mittelwert von η_{eff} für die Zeit ΔT . Er ist von Grim berechnet worden [19]:

$$\eta_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T/2}^{t+\Delta T/2} \eta_{\text{eff}} dt = \int_0^{\infty} \cos[\omega t + \sigma(\omega)] \cdot \sqrt{2 S(\omega) \left[\frac{\frac{\omega^2 L}{g} \sin \frac{\omega^2 L}{g}}{\pi^2 - \left(\frac{\omega^2 L}{2g}\right)^2} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\omega \Delta T}{2}}{\frac{\omega \Delta T}{2}} \right]^2} d\omega. \quad (6)$$

Der Mittelwert $\eta_{\Delta T}$ ist also wieder eine zufällige Funktion. Er hängt von ΔT ab. Für $\Delta T = 0$ wird $\eta_{\Delta T} = \eta_{\text{eff}}$, für $\Delta T \rightarrow \infty$ geht $\eta_{\Delta T}$ für alle t gegen Null.

Damit ein Schiff kentert, muß

$$\eta_{\Delta T}(\Delta T) \geq \eta_K(T_K) \quad \text{für } \Delta T \geq T_K \quad (7)$$

sein. Diese Bedingung ist hinreichend für Kentern, aber nicht notwendig. Wir wollen diesen Zusammenhängen zunächst nicht weiter nachgehen und annehmen, daß es einen bestimmten Wert ΔT^* gibt, mit dem (7) notwendig und hinreichend wird.

Wir können nun untersuchen, wie häufig wir bei einem bestimmten Seegang, der durch $S(\omega)$ gekennzeichnet sei, Kentern zu erwarten haben. Bild 13 zeigt ein Beispiel für die zufällige Funktion $\eta_{\Delta T^*}$. In das Bild ist auch η_K eingezeichnet.

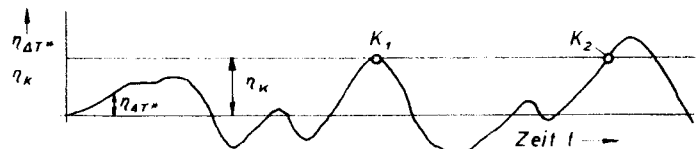


Bild 13 Definition von Kenterpunkten
 $K_1 \dots \eta_{\Delta T^*} = \eta_K, d\eta_{\Delta T^*}/dt = 0$
 $K_2 \dots \eta_{\Delta T^*} = \eta_K, d\eta_{\Delta T^*}/dt > 0$

Mit einem Kenterfall ist immer dann zu rechnen, wenn die Funktion $\eta_{\Delta T^*}$ die Gerade η_K von unten nach oben schneidet oder berührt (Punkte K_1 und K_2 in Bild 13). Es muß also

$$\eta_{\Delta T^*} = \eta_K \quad \text{und} \quad d\eta_{\Delta T^*}/dt = \dot{\eta}_{\Delta T^*} \geq 0 \quad (8)$$

sein.

Man kann zeigen, daß die Verteilungsdichte der Werte von $\eta_{\Delta T^*}$ und $\dot{\eta}_{\Delta T^*}$ gleich

$$w(\eta_{\Delta T^*}, \dot{\eta}_{\Delta T^*}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{m_0 m_2}} \exp\left(-\frac{m_2 \eta_{\Delta T^*}^2 + m_0 \dot{\eta}_{\Delta T^*}^2}{2 m_0 m_2}\right) \quad (9)$$

ist, wobei

$$m_0 = \int_0^{\infty} S_{\eta_{\Delta T}^*}(\omega) d\omega \quad (10)$$

$$m_2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S_{\eta_{\Delta T}^*}(\omega) d\omega$$

die Flächen unter den Spektren⁵⁾ von $\eta_{\Delta T}^*$ bzw. der Geschwindigkeit $\dot{\eta}_{\Delta T}^*$ sind.

Gibt es je Zeiteinheit im Mittel f_K Punkte K (vergleiche Bild 13, wir wollen die Punkte K als Kenterpunkte bezeichnen), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Zeitintervall dt gerade ein Kenterpunkt vorkommt

$$f_K dt = \int_0^{\infty} w(\eta_K, \dot{\eta}_{\Delta T}^*) d\eta_{\Delta T}^* d\dot{\eta}_{\Delta T}^* \quad (11)$$

Daraus findet man mit $d\eta_{\Delta T}^* = \dot{\eta}_{\Delta T}^* dt$:

$$f_K = \int_0^{\infty} \dot{\eta}_{\Delta T}^* w(\eta_n, \dot{\eta}_{\Delta T}^*) d\dot{\eta}_{\Delta T}^* \quad (11a)$$

Einsetzen von Gleichung (9) und integrieren ergibt

$$f_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{\eta_K^2}{2m_0}} \quad (12)$$

Mit f_K haben wir bereits ein Maß für die Häufigkeit der Punkte K und damit der Gefährdung eines Schiffes gefunden. Wir wollen nun noch einen Schritt weitergehen und fragen, wie wahrscheinlich es ist, daß in einem Zeitraum T (etwa die Zeit, die ein Schiff durch ein Sturmgebiet fährt oder ein Teil dieser Zeit, über den man den Seegang als stationär voraussetzen darf) kein Kenterpunkt auftritt.

Zunächst sei angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, daß unter der Hypothese K im Intervall $(t=0, t=dt)$ ein Punkt K im Intervall $(t, t+dt)$ und kein Punkt K zwischen $(0, t)$ liegt. Sie sei

$$w_0(t) dt.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitraum T kein Punkt K liegt, das Schiff in der Zeit T also nicht kentert, wird damit (vergl. Bild 14):

5) Den Zusammenhang zwischen $S_{\eta_{\Delta T}^*}(\omega)$ und dem Seegangsspektrum $S(\omega)$ kann man leicht durch Vergleich von Gleichung (2) und (6) feststellen:

$$S_{\eta_{\Delta T}^*}(\omega) = S(\omega) \left[\frac{\omega^2 L}{g} \sin \frac{\omega^2 L}{g} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\omega \Delta T^*}{2}}{\frac{\omega \Delta T^*}{2}} \right]^2$$

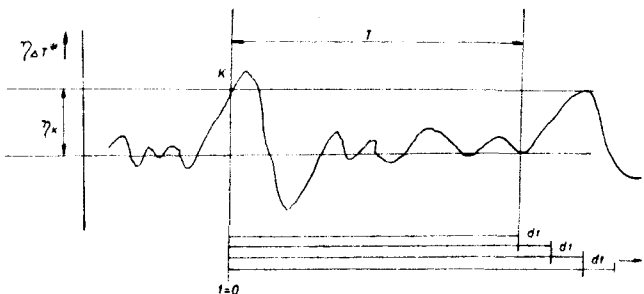


Bild 14

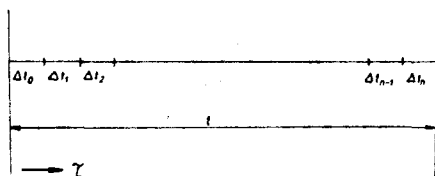


Bild 15

$w_0(t) \Delta t =$ Wahrscheinlichkeit für K in Δt_n , kein K in Δt_i ($i=1, 2, 3, \dots, n-1$) unter der Hypothese K in Δt_0

$$W_0 = \int_0^T w_0(t) dt \quad (13)$$

$w_0(t)$ kann aus Überlegungen über die Wahrscheinlichkeit für Punkte K in Intervallen Δt (vergl. Bild 15) unter der Hypothese K in Δt_0 bestimmt werden:

$$w_0(t) dt = \left[p_0(t) - \frac{1}{1!} \int_0^t p_1(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2!} \int_0^t \int_0^t p_2(t, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \frac{1}{3!} \int_0^t \int_0^t \int_0^t p_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \right] dt \quad (14)$$

In dieser Gleichung bedeutet

$p_0(t) dt$

die Wahrscheinlichkeit für K in $(t, t+dt)$ unter der Hypothese K in $(0, dt)$

$p_1(t, \tau) dt d\tau$

die Wahrscheinlichkeit für K in $(t, t+dt)$ und in $(\tau, \tau+dt)$ unter der Hypothese K in $(0, dt)$

$p_2(t, \tau_1, \tau_2) dt d\tau_1, d\tau_2$

die Wahrscheinlichkeit für K in $(t, t+dt)$, K in $(\tau, \tau+dt_1)$ und K in (τ_2, τ_2+dt_2) unter der Hypothese K in $(0, dt)$.

Um die Werte p_0, p_1, p_2, \dots zu berechnen, benötigen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Punkt K in $(0, dt)$ liegt. Sie ist (vergl. Gl. 11a):

$$\bar{p} dt = \int_{\dot{\eta}_{\Delta T}^* = 0}^{\infty} \dot{\eta}_{\Delta T}^* w(\eta_K, \dot{\eta}_{\Delta T}^*, t=0) d\dot{\eta}_{\Delta T}^* dt \quad (15)$$

Zur Bestimmung von p_0 brauchen wir ferner die Wahrscheinlichkeit für K in $(0, dt)$ und (t_1, t_1+dt_1) :⁶⁾

$$\bar{p} dt dt_1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{\eta}_{\Delta T}^* \dot{\eta}_{\Delta T}^* w(\eta_{K1}, \dot{\eta}_{\Delta T}^*, t=0; \eta_{K2}, \dot{\eta}_{\Delta T}^*, t_1) d\dot{\eta}_{\Delta T}^* d\dot{\eta}_{\Delta T}^* dt dt_1 \quad (16)$$

Mit (15) und (16) findet man

$$p_0 dt = \frac{\bar{p} dt dt_1}{p dt} \quad (17)$$

Ähnlich kann auch p_1, p_2 usw. berechnet werden. Die in den Integralen (15), (16) sowie in ähnlichen, zur Bestimmung von p_1, p_2 , usw. nötigen Integralen auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben sich zu (vergl. z. B. [20], S. 102 und folgende):

$$w(\eta_{\Delta T}^* \circ, \dot{\eta}_{\Delta T}^* \circ, t=0; \eta_{\Delta T}^* 1, \dot{\eta}_{\Delta T}^* 1, t_1; \eta_{\Delta T}^* 2, \dot{\eta}_{\Delta T}^* 2, t_2; \dots) = (2\pi)^{-n/2} |M|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} \mathcal{Y}' M^{-1} \mathcal{Y}] \quad (18)$$

In (18) ist n die Anzahl der zufälligen Variablen $\eta_{\Delta T}^* \circ, \dot{\eta}_{\Delta T}^* \circ, \eta_{\Delta T}^* 1, \dot{\eta}_{\Delta T}^* 1, \dots$ usw. sind nicht zufällige Variable, sondern Parameter).

Der Exponent ist eine quadratische Form mit dem Zeilenvektor $\mathcal{Y}' = [\eta_{\Delta T}^* \circ, \dot{\eta}_{\Delta T}^* \circ, \eta_{\Delta T}^* 1, \dot{\eta}_{\Delta T}^* 1, \dots]$

$$\text{und dem Spaltenvektor } \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \eta_{\Delta T}^* \circ \\ \dot{\eta}_{\Delta T}^* \circ \\ \eta_{\Delta T}^* 1 \\ \dot{\eta}_{\Delta T}^* 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

6) Die Indizes bei t dienen lediglich zur Bezeichnung der zugehörigen Größen t und dt .

$|M|$ ist der Betrag, M^{-1} die inverse Matrix von

$$M = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \dots \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

In dieser Matrix ist

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= m_0 = \overline{\eta_{\Delta T}^* o^2} \\ \mu_{22} &= m_2 = \overline{\dot{\eta}_{\Delta T}^* o^2} \\ \mu_{12} &= \overline{\eta_{\Delta T}^* o \dot{\eta}_{\Delta T}^* o} = 0 \\ \mu_{13} &= \overline{\eta_{\Delta T}^* (\tau) \eta_{\Delta T}^* (\tau + t)} = \dots \end{aligned}$$

Die eben beschriebenen Zusammenhänge lassen erkennen, daß sich das Integral (13) — wenn überhaupt — nur mit übermäßigem Aufwand berechnen läßt. Wir wollen deshalb versuchen, durch Vereinfachungen zu einem näherungsweise, dafür aber leicht zu berechnenden Ergebnis zu kommen.

Dazu überlegen wir uns, daß in nicht zu nahe beieinander liegenden Zeitpunkten die Punkte K unabhängig voneinander und von der jeweiligen Zeit auftreten. Bei der Berechnung von $w_0(t)$ (vgl. Gleichung (14)) für nicht zu kleine Werte von t (wenn man die untere Grenze des Integrals (13) nicht zu klein wählt, bleibt w_0 für kleine Werte von t ohnehin außer acht) dürfte es zulässig sein, wenn man generell annimmt, daß die Punkte K zu verschiedenen Zeiten unabhängig voneinander auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Punktes K zu einer beliebigen Zeit ist wie bereits erwähnt wurde, $f_K dt$.

Unter der gemachten Voraussetzung erhält man für Gleichung (14):

$$w_0(t) dt = \left[f_K - \frac{1}{1!} \int_0^t f_K^2 d\tau + \frac{1}{2!} \int_0^t \int_0^t f_K^3 d\tau_1 d\tau_2 - + \right] dt = f_K e^{-f_K t} dt. \quad (19)$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit für Nichtkentern innerhalb der Zeit T (vgl. Gl. 13).

$$W_0 = \int_0^T f_K e^{-f_K t} dt = e^{-f_K T}. \quad (20)$$

Zu demselben Ergebnis kann man auch auf einem anderen Wege kommen. Wir teilen den betrachteten Zeitraum T in n -Abschnitte $\Delta t = T/n$. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Punktes K in einem Abschnitt Δt ist $p = f_K \Delta t$. Die Folge der Zeitabschnitte kann man nun als eine Reihe von n -Alternativversuchen (Alternative: Es tritt ein oder kein Kenterpunkt auf) auffassen. In Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird gezeigt, wie die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen ist, daß bei n -Alternativversuchen ein Ereignis, dem bei jedem Versuch gerade die Wahrscheinlichkeit p zukommt, gerade $v = r$ mal auftritt (vgl. z. B. [20], S. 91):

$$W_n(v=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (21)$$

Nun setzen wir für $p = \frac{f_K T}{n}$ und formen Gleichung (21) um:

$$\begin{aligned} W_n(v=r) &= \binom{n}{r} \left(\frac{f_K T}{n} \right)^r \left(1 - \frac{f_K T}{n} \right)^{n-r} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} \left(\frac{f_K T}{n} \right)^r \left(1 - \frac{f_K T}{n} \right)^{n-r} = \\ &= \frac{(f_K T)^r}{r!} \left(1 - \frac{f_K T}{n} \right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n} \right)}{\left(1 - \frac{f_K T}{n} \right)^r} \quad (21a) \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch $\Delta t = T/n$ beliebig klein werden lassen (d. h. $n \rightarrow \infty$; $\Delta t \rightarrow dt$), so erhalten wir

$$W(v=r) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(v=r) = \frac{(f_K T)^r}{r!} e^{-f_K T}. \quad (22)$$

Es ist dies die Poissonverteilung (oder Verteilung der seltenen Ereignisse, vgl. z. B. [20], S. 101).

Praktisch ist die Zahl der Kenterpunkte ohne Interesse, da ein Schiff nur einmal kentern kann. Wir verwenden deshalb besser die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schiff nicht kentert. Man findet sie, indem man in (22) $r = 0$ setzt:

$$W_0 = e^{-f_K T}. \quad (23)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit Gl. (20) überein. Um die Zusammenhänge besser zu übersehen, wollen wir in Gleichung (20) bzw. (23) f_K nach Gleichung (12) einsetzen und auch die Gleichungen (10) nochmals anschreiben:

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein schnelles Schiff in achterlichem Seegang mit dem Spektrum $S(\omega)$ während der Zeit T nicht kentert, ist

$$\begin{aligned} W_0 &= \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{\eta_K^2}{2m_0} T} \right] \\ \text{mit } m_0 &= \int_0^\infty S(\omega) \left[\frac{\omega^2 L}{g} \sin \frac{\omega^2 L}{g} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\omega \Delta T^*}{2}}{\frac{\omega \Delta T^*}{2}} \right]^2 d\omega \\ m_2 &= \int_0^\infty \omega^2 S(\omega) \left[\frac{\omega^2 L}{2g} \sin \frac{\omega^2 L}{g} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\omega \Delta T^*}{2}}{\frac{\omega \Delta T^*}{2}} \right]^2 d\omega. \quad (24) \end{aligned}$$

Wegen der vielen zum Teil recht groben Näherungen in der Rechnung kann man kaum erwarten, daß W_0 sehr genau ist. Man wird jedoch sicher berechtigt sein, aus (24) Folgerungen über die Tendenz der einzelnen Einflüsse zu ziehen. Der Einfluß der Zeit, während der das Schiff dem Seegang ausgesetzt ist, ist leicht zu übersehen (Bild 16). Die Wirkung krängender Momente geht über η_K ein: Je größer die krängenden Momente sind, um so kleiner wird η_K . Außerdem hängt η_K auch von dem aufrichtenden Hebel bei Glattwasser, der Verminderung dieser Hebel bei Seegang und der Form der Hebelarmkurve ab: Je kleiner die Glattwasserhebel und je größer der Verlust an aufrichtenden Moment bei Lage als Schiff auf Wellenberg, desto kleiner wird η_K . Der Seegang schließlich wird durch m_0 und m_2 , die vom Seegangsspektrum abhängen, berücksichtigt.

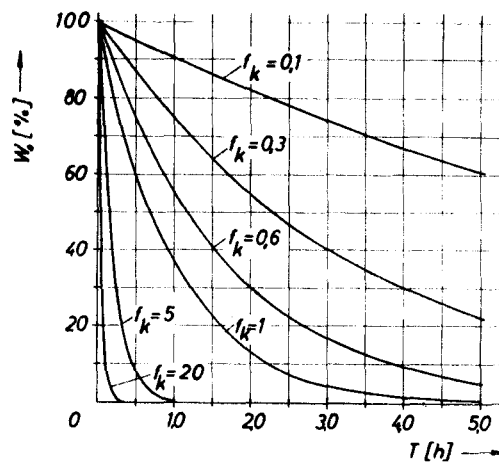


Bild 16 Wahrscheinlichkeit für Nichtkentern

Bevor wir diese Zusammenhänge eingehender diskutieren, wollen wir uns nochmals kurz mit der Größe ΔT^* beschäftigen. Dabei bleiben wir den exakten Nachweis, daß es eine und nur eine Größe ΔT^* gibt, die so bestimmt werden kann, daß alle möglichen Kenterpunkte K berücksichtigt werden, schuldig. Wir nehmen an, daß wir der Wirklichkeit ausreichend gerecht werden, wenn wir ΔT^* so wählen, daß die erste der Gleichungen (24) ein Minimum wird. Dazu muß folgende Funktion von ΔT^* ein Maximum werden:

$$\sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{\eta_K^2}{2m_0}} = \text{Max!} \quad (25)$$

Nach unten ist ΔT begrenzt. Gibt man nämlich eine zu kleine Kenterzeit vor, so gibt es keine Welle mit der Amplitude η_K , die die aufrichtenden Momente soweit vermindert, daß das resultierende krängende Moment das Schiff in dieser kurzen Zeit umkippt. Nach oben ist ΔT nicht begrenzt. Man kann immer η_K so wählen, daß die Kenterzeit $T_K = \Delta T$ gegen unendlich geht. Für diesen Fall gehen aber m_0 und m_2 gegen Null⁷⁾. Das gleiche gilt dann auch für Gleichung (25).

Man kann erwarten, daß

$$f(\Delta T) = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{\eta_K^2}{2m_0}}$$

ein recht breites Maximum hat, d. h. daß für einen nicht allzu kleinen Bereich von ΔT die Funktion $f(\Delta T)$ etwa gleich groß bleibt (oder mit anderen Worten, daß in diesem Bereich $df(\Delta T)/d\Delta T$ nur wenig von Null abweicht): Die Größen m_0 , m_2 und η_K nehmen nämlich in diesem Bereich alle monoton mit ΔT ab, die Verhältnisse m_2/m_0 und η_K^2/m_0 werden sich deshalb nur wenig ändern (Bild 15 zeigt die Änderung von m_0 nach Grim). Da man das Maximum durch Probieren feststellen muß, ist diese Tatsache von Nutzen.

In diesem Zusammenhang drängt sich die Frage auf, ob die Annahme, daß das Schiff nur aus einer Gleichgewichtslage heraus kentert, genügt. Was nützt es, wenn wir ΔT^* so bestimmen, daß zwar möglichst alle Punkte K , die für diese Art des Kenterns charakteristisch sind, erfaßt werden, wenn es daneben noch Kenterpunkte anderer Art gibt?

Wir erinnern uns, daß bei der Herleitung von Gleichung (24) vorausgesetzt wurde, daß es sich um ein schnelles Schiff in achterlichem Seegang handelt. Wir wollen zeigen, daß es für solche Schiffe in der Tat genügen dürfte, nur mit Kentern aus einer Gleichgewichtslage zu rechnen und andeuten, wie man bei langsamen Schiffen vorzugehen hätte, um die Wahrscheinlichkeit für Kentern zu bestimmen.

Es ist bekannt, daß unter bestimmten Bedingungen durch die periodische Änderung der aufrichtenden Momente infolge regelmäßigen achterlichen Seegangs starke Rollbewegungen erregt werden [21]. Bei unregelmäßigem Seegang verläuft die Momentenänderung nicht periodisch. Grim hat aber gezeigt, daß die effektive Welle für eine gewisse Zeit durch eine harmonisch schwankende mit im allgemeinen kleinerer Amplitude η_{\sim} ersetzt werden kann [19]. Wenn wir wissen, daß eine bestimmte Zahl von Perioden harmonischer Wellen mit bestimmter Amplitude zum Kentern führt, so können wir auch für diesen Fall eine Wahrscheinlichkeit für Kentern bzw. Nichtkentern berechnen. An die Stelle von ΔT tritt hier die Zahl der Perioden n . Die Amplitude der periodischen effektiven Welle nimmt mit der Anzahl der Perioden ab — ähnlich wie die Amplitude der mittleren effektiven Welle mit der Zeit ΔT . Bild 18 zeigt die Abnahme der Fläche unter dem Spektrum der periodischen effektiven Wellen. An Hand der Bild 17 und 18 kann man sich überlegen, daß bei schnellen Schiffen in erster Linie Kentern aus einer Gleichgewichtslage zu er-

warten ist, da hier die Werte $\eta_{\Delta T}$ groß, die Werte η_{\sim} dagegen klein werden. Bei langsamen Schiffen dagegen können die Verhältnisse umgekehrt liegen.

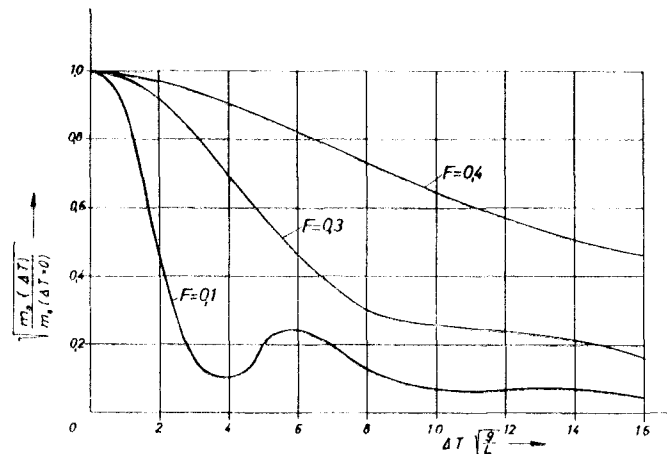


Bild 17 Abnahme von m_0 mit ΔT

Das Bild gilt für See von hinten und Neumannsches Seegangsspektrum für Windgeschwindigkeit $u^2 = g \cdot L/2$ (aus Grim [19])

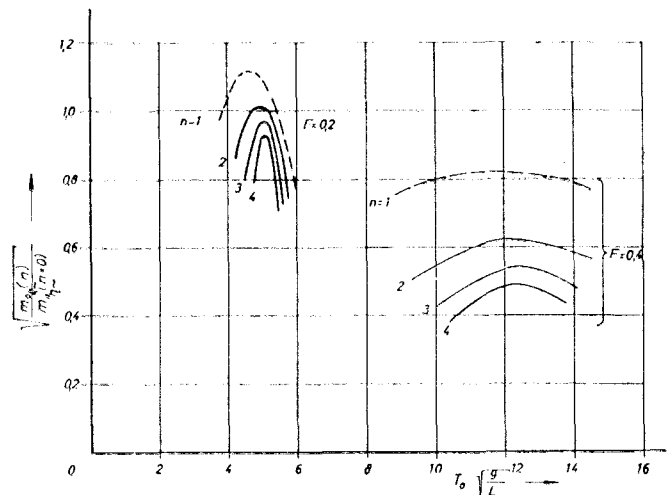


Bild 18 Abnahme von m_0 mit der Anzahl von Perioden n
 T_0 ist die Periode der als harmonisch angenommenen effektiven Welle

Es handelt sich dabei um Grenzen des allgemeinen Falles, bei dem beide Möglichkeiten des Kenterns gleichzeitig beachtet werden müssen. Es sei noch auf Parallelen zu den Kenterkriterien hingewiesen: Dem Fall eines schnellen Schiffes in achterlichem Seegang entspricht die „quasistatische Methode“ zur Beurteilung der Kenterersicherheit, dem Fall des langsamen Schiffes entspricht die „dynamische Methode“. Dem „neuen Kenterkriterium“ schließlich würde eine Wahrscheinlichkeit für Kentern entsprechen, bei deren Herleitung auf die bisherigen Einschränkungen (sehr große oder kleine Geschwindigkeit, zweidimensionaler achterlicher Seegang) verzichtet wird.

Wir wollen nun wieder auf die Diskussion der Gleichung (20) bzw. (24) zurückkommen und zunächst den Grenzfall eines sehr unsicheren Schiffes betrachten. Für ein solches Schiff wird η_K sehr klein. Wir können η_K beliebig klein machen, müssen jedoch $\eta_K \equiv 0$ ausschließen. Dies würde nämlich bedeuten, daß das Schiff schon bei glattem Wasser kentert; dieser Fall ist aber nicht Gegenstand unserer Untersuchung. Wird η_K sehr klein, so haben wir immer, wenn $\eta_{\Delta T}$ auch nur einen kleinen Wert größer als Null annimmt, Kentern zu erwarten. Da das Schiff nur einmal kentern kann, haben wir als Kenterpunkt den Punkt festgelegt, in dem $\eta_{\Delta T}$

7) Vergleiche die Gleichungen (10).

eben größer als Null wird, d. h. $\eta_{AT} = 0$ und $\dot{\eta}_{AT} > 0$. Für den Fall $\eta_K \rightarrow 0$ müssen die Kenterpunkte also die Aufwärtsnullstellen der Funktion η_{AT} sein. Die durchschnittliche Zahl der Aufwärtsnullstellen von η_{AT} ist

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$

In der Tat finden wir für den Fall $\eta_K \rightarrow 0$ auch nach Gleichung (12)

$$f_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$

(für $\eta_K \rightarrow 0$ geht $e^{-\eta_K^2 / 2m_0} \rightarrow 1$)

Man kann sich leicht überlegen, daß hier die Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern innerhalb der Zeit T kleiner sein muß als die Wahrscheinlichkeit, daß kein Kenterpunkt (nach obiger Definition) auftritt. Der Grund dafür liegt darin, daß in diesem Falle Kenterpunkte nicht genügen, um die Seegangsverhältnisse, die zum Kernern führen, ausreichend zu erfassen. Wir können in Anlehnung an eine in der Meßtechnik gebräuchlichen Ausdrucksweise sagen, daß die Auflösung unseres Verfahrens schlecht ist, wenn T nicht wesentlich größer als die Kenterzeit T_K ist⁷⁾. Für $T = (10 \div 10^2) T_K$ liefert Gleichung (26) aber wieder den richtigen Wert für die Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern: $W_0 = 0$ (vergleiche die Kurve $f_K = 20$ in Bild 16).

Als nächstes betrachten wir ein sehr sicheres Schiff. Bei oberflächlicher Betrachtung von Gleichung (20) bzw. (24) könnten wir hier den Eindruck gewinnen, daß auch ein solches Schiff kentert, wenn wir es nur lange genug dem Seegang aussetzen. Dies widerspricht jedoch der Erfahrung, Schiffe mit „ausreichender“ Stabilität wettern viele Stürme ab, ohne zu kernern. Dieser Widerspruch läßt sich einfach auflären:

1. Der Verlust an aufrichtendem Moment wächst nicht beliebig mit der Wellenhöhe. Es gibt eine Wellenhöhe, von der an keine Hebelarmminderung mehr eintritt. Es scheint praktisch sinnvoll, in diesem Fall $\eta_K = \infty$ zu setzen. Damit liefert Gleichung (20) bzw. (24) $W_0 = 1$ für jede Zeit T .

2. Die Werte der Seegangsfunktion werden hier als normal verteilt angesehen. Man kann also eine wenn auch nur sehr kleine Wahrscheinlichkeit für sehr hohe Wellen ausrechnen. In Wirklichkeit treten aber keine so hohen Wellen auf. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie z. B. bei der Verteilung der Körpergröße einer rassistisch homogenen Bevölkerung. Sie ist normal verteilt. Es wäre jedoch unsinnig, daraus zu folgern, daß eine geringe Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß einzelne Individuen in den Himmel oder nach unten wachsen.

Daß man eine bestimmte Wahrscheinlichkeit auch für solche Fälle ausrechnen kann, spricht nicht dagegen, die Verteilung der Körpergröße durch eine Normalverteilung zu beschreiben. Freilich darf man keine unsinnigen Folgerungen daraus ziehen.

Wir können aus vorstehender Überlegung schließen, daß immer dann, wenn $\eta_K / \sqrt{m_0}$ sehr groß wird, die Unsicherheit überbewertet wird. D. h., daß dann Gleichung (20) eine zu kleine Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern liefert. Zur Zeit können wir noch nicht genau angeben, von welchen Werten $\eta_K / \sqrt{m_0}$ an dies gilt. Es ist jedoch zu erwarten, daß die rege Beschäftigung mit den Problemen des unregelmäßigen Seegangs an vielen Stellen bald die Voraussetzungen liefern wird, um auch diese Frage beantworten zu können.

Für eine bestimmte Zeit T , die ein Schiff achterlichem Seegang ausgesetzt ist, hängt die Wahrscheinlichkeit für Nicht-

kernern W_0 nur von f_K ab. Bild 19 zeigt diese Abhängigkeit. Bei einem bestimmten Seegang (d. h. durch ein bestimmtes Spektrum charakterisiertem Seegang) ist durch f_K auch η_K bestimmt. Aus Bild 19 kann man eine wichtige Feststellung ablesen: Im Bereich hoher Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern (etwa $W_0 > 60\%$) und bei nicht zu kleiner Zeit T haben kleine Änderungen von f_K (bei bestimmtem Seegang)

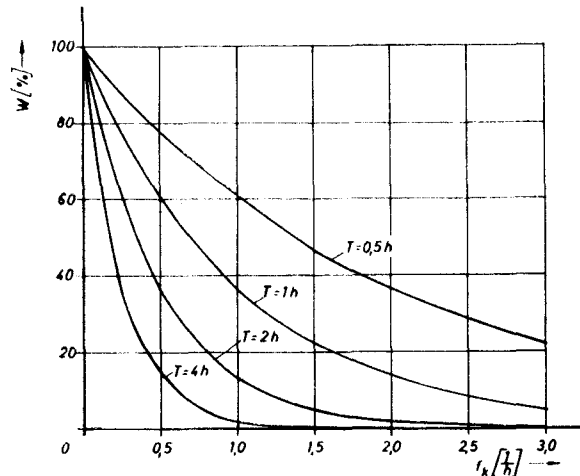


Bild 19 Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern

von η_K , d. h. der Stabilitätskennwerte des Schiffes sowie der krägenden Momente) eine große Änderung der Wahrscheinlichkeit zur Folge. Damit ist zumindest für den Fall schneller Schiffe in achterlichem Seegang gezeigt, daß sich die Hebelarmkurven „sicherer“ und „unsicherer“ Schiffe nicht sehr stark unterscheiden müssen.

Zum Schluß wollen wir noch einige Überlegungen anstellen, inwiefern die vorstehenden Rechnungen durch Versuche bestätigt oder ergänzt werden können.

Wir nehmen an, daß wir für ein Schiffsmodell $W_0 = 50\%$ berechnet haben. Dabei sei für T die Zeit, die es braucht, um einen Tank, in dem unregelmäßiger Seegang erzeugt werden kann, zu durchfahren, angenommen worden. Wenn der berechnete Wert richtig wäre, und wir sehr viele Fahrten (theoretisch unendlich viele) machen würden, so müßte das Schiff bei genau 50% aller Fahrten kernern. Wie viele Kenterfälle haben wir zu erwarten, wenn wir nicht unendlich viele, sondern z. B. 20, 40 oder 80 Fahrten machen? Eine Antwort auf die Frage ist möglich mit Hilfe des Chi-Quadratverfahrens von Pearson (vergl. z. B. [20], S. 279). Damit kann man berech-

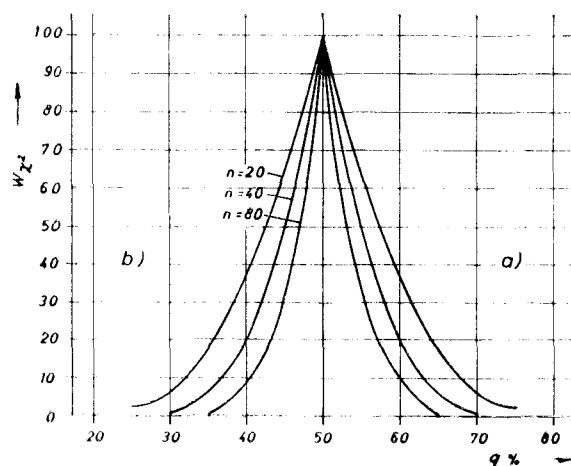


Bild 20 Wahrscheinlichkeit W_{χ^2} , daß bei n -Versuchen a) mehr oder b) weniger als $q\%$ Kenterfälle auftreten, wenn die Wahrscheinlichkeit für Nichtkernern $q = W_0 = 50\%$ ist.

⁷⁾ Auch die Annahme, daß die Kenterpunkte voneinander unabhängig sind, dürfte für diesen Fall nicht zulässig sein.

nen, mit welcher Wahrscheinlichkeit W_{x^2} bei n Versuchen (d. h. Fahrten) der Prozentsatz von Kenterfällen größer bzw. kleiner als ein Wert q ist. Bild 20 zeigt z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer endlichen Zahl von Versuchen mehr oder weniger als 50% Kenterfälle auftreten, gleich eins ist (N. B.: das heißt nicht, daß es sicher ist, daß nicht 50% Kenterfälle auftreten!). Die Wahrscheinlichkeit, daß bei 20 Versuchen mehr als 60% oder weniger als 40% Kenterfälle auftreten, ist 37%, bei 40 Versuchen 20% und bei 80 Versuchen immer noch 8%. Bei ähnlichen Aufgaben aus der Stichprobentheorie — wir sehen hier die n -Versuche als Stichprobe aus der potentiell unendlich großen Zahl möglicher Versuche an — ist es üblich, den experimentellen Beweis, daß $W_0 \neq 50\%$ ist, erst dann als erbracht anzusehen, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Prozentsatz der beobachteten Kenterfälle kleiner als 5% ist. Im vorliegenden Beispiel wäre dies bei folgenden Zahlen n_K von Kenterfällen bei n -Versuchen der Fall

Zahl der Versuche n	20	40	80
Zahl der Kenterfälle n_K	5 ($q=25\%$)	14 ($q=35\%$)	31 ($q=39\%$)
	15 ($q=75\%$)	24 ($q=65\%$)	49 ($q=61\%$)

Diese Überlegung zeigt, daß es sehr aufwendig ist, die Größe W_0 experimentell zu überprüfen. Noch mehr Aufwand wäre notwendig, wenn man etwa ein Gleichung (20) entsprechendes Gesetz nicht auf Grund theoretischer Überlegungen, sondern auf dem Wege über Modellversuche aufstellen wollte.

Der Verfasser hält es deshalb im allgemeinen für rationeller, Versuche so zu planen, daß man dabei ins einzelne gehende Informationen gewinnt, wie z. B. den Zusammenhang zwischen η_K und T_K , die Zahl der Wellen, die nötig ist, um ein Schiff soweit aufzuschaukeln, daß es kentert, Nachweis der Gültigkeit der von Grim eingeführten und auch hier verwendeten effektiven Welle, Untersuchung der Eigenschaften des unregelmäßigen Seegangs. Bei den erstgenannten Experimenten handelt es sich nicht um Stichproben, bei denen das Ergebnis weitgehend von der Zahl der Versuche abhängt. Bei der Untersuchung des unregelmäßigen Seegangs kann man bereits durch relativ kurzzeitige Messungen eine sehr umfangreiche Stichprobe erhalten, da hier auch kleine Wellen zur Information beitragen. Bei Kenterversuchen dagegen werden nur ganz bestimmte relativ selten auftretende Teile der Seegangsfunktion erfaßt.

(Vorgetragen am 27. Januar 1962)

Bezeichnungen

a	Konstante
D	Verdrängung
$E(\dots)$	Erwartungswert von ...
f_K	durchschnittliche Zahl von Kenterpunkten je Zeiteinheit
g	Erdbeschleunigung
h	Hebel der aufrichtenden Momente
h_{Kr}	Hebel der krängenden Momente
$h_{\eta_{eff}}$	Hebel der aufrichtenden Momente für Lage des Schiffes auf Wellenberg
Δh	Amplitude der Schwankung der aufrichtenden Hebel in achterlichem regelmäßigen Seegang
J'	scheinbares Trägheitsmoment
L	Schiffslänge
m_0	Erwartungswert von $\eta_{\Delta T^*}^2$
m_2	Erwartungswert von $\dot{\eta}_{\Delta T^*}^2$
$m_{0\eta_{\sim}}$	Erwartungswert von η_{\sim}^2
n	Anzahl von Versuchen (oder Perioden)
p	diskrete Wahrscheinlichkeit
p_i, \bar{p}, \bar{p}	Wahrscheinlichkeitsdichten
q	relative Häufigkeit
r	Zahl von Kenterpunkten
$S(\omega)$	Seegangsspektrum
$S_{\eta_{\Delta T^*}}(\omega)$	Energiespektrum von $\eta_{\Delta T^*}$
T	Zeitspanne
T_0	Überholperiode

T_K	Kenterzeit
ΔT	Zeitabschnitt
ΔT^*	bestimmter Wert von ΔT
t	Zeit
W	Dämpfungskonstante, Wahrscheinlichkeit
W_0	Wahrscheinlichkeit für Nichtkentern
w, w_0	Wahrscheinlichkeitsdichten
x	Koordinate
z	Seegangsfunktion
ϵ	Phasenlage (Schiff zur Welle)
η_{eff}	Amplitude der effektiven Welle
$\eta_{\Delta T}(\Delta T^*)$	Mittelwert über ΔT (ΔT^*) von η_{eff}
η_K	Amplitude der Welle, in der das Schiff bei stationärer Lage auf Wellenberg in der Zeit T_K kentert
η_{\sim}	Amplituden einer harmonischen effektiven Welle
ν	Zahl von Kenterpunkten
ξ	Koordinate
o'	Phasenverschiebung
τ	Zeit
φ	Rollwinkel
φ_K	Rollwinkel, von dem aus das Schiff während einer Überholperiode kentert
φ_0	Rollwinkel, von dem aus das Schiff während einer Überholperiode nicht kentert
$\bar{\varphi}_K$	Grenze zwischen φ_K und φ_0
ψ	kritischer (kennzeichnender) Rollwinkel
ω	Kreisfrequenz

Schrifttum

- [1] Denny, W.: „On cross curves of stability“, TINA 1884, S. 45/77.
- [2] Benjamin, L.: „Über das Maß der Stabilität der Schiffe“, Jahrbuch der STG 1914, S. 594/614.
- [3] Holt, S. F.: „Stability and seaworthiness“, TINA 1925, S. 364.
- [4] Com ment z, C.: „Praktische Stabilitätsfragen“, Werft-Reederei-Hafen 1927, S. 1/3.
- [5] Pierrottet, E. A.: „A standard of stability for ships“, TINA 1935, S. 208/215.
- [6] Rahola, J.: „The Judging of the Stability of Ships“, Helsinki 1939.
- [7] Arndt, B., und Roden, S.: „Stabilität bei vor- und achterlichem Seegang“, Schiffstechnik 1958, S. 192/199.
- [8] Paulling, J. R.: „Stability and rolling of ships in a following sea“, University of California. Institut of Engineering Research. Berkeley, California 1958.
- [9] Wendel, K.: „Stabilitätseinbußen im Seegang und durch Koksdeckslast“, Hansa 1954, S. 2009/2022.
- [10] Wendel, K.: „Sicherheit gegen Kentern“, ZVDI 1958, S. 1523/1534.
- [11] Wendel, K., und Platzoeder, W.: „Der Untergang des Segelschulschiffes ‚Pamir‘“, Hansa 1958, S. 367/374.
- [11a] Platzoeder, W., P. Heptner und S. Roden: „Stabilitätsuntersuchungen zum Untergang der ‚Pamir‘“, Hansa 1958, S. 430/440.
- [12] Arndt, B., S. Kastner und S. Roden: „Die Stabilitätsprüfung des Segelschulschiffes ‚Gorch Fock‘“, Schiffstechnik 1960, S. 177/190.
- [13] Arndt, B.: „Ermittlung von Mindestwerten für die Stabilität“, Schiffstechnik 1960, S. 35/46.
- [14] Dankwardt, E.: „Stabilitätsvorschriften verschiedener Länder“, Hansa 1959, S. 2364/2368.
- [15] Yamagata, M.: „Standard of stability adopted in Japan“, TINA 1959.
- [16] Register der UdSSR, Stabilitätsvorschriften für See- und Hafenschiffe 1959.
- [17] M. St. Denis u. W. J. Pierson: „On the motion of ships in confused seas“, SNAME 1953, S. 280/332.
- [18] Bartsch, H.: „Statistische Methoden zur Untersuchung der Bewegungen eines Schiffes im Seegang“, Schiffstechnik 1959, S. 1/8 und 85/92.
- [19] Grim, O.: „Beitrag zu dem Problem der Sicherheit des Schiffes im Seegang“, Schiff und Hafen 1961.
- [20] Schmetterer, L.: Einführung in die mathematische Statistik, Wien 1956.
- [21] Grim, O.: „Rollschwingungen, Stabilität und Sicherheit im Seegang“, Schiffstechnik 1952, S. 10/21.

Beispiele für die Berechnung der Grenzkurven

W. Abicht

Im folgenden wird gezeigt, wie die in Bild 6 und 8 bzw. Bild 9 vorstehender Arbeit angegebenen Grenzkurven berechnet wurden. Es mußte dazu die Differentialgleichung (1) vorstehender Arbeit integriert werden. Da die Integration immer nur über eine Zeit erfolgt, die kleiner als eine Periode ist, kann man in Gleichung (1) das Dämpfungsglied weglassen, ohne daß dadurch ein nennenswerter Fehler entsteht.

Die Integration der vereinfachten Gleichung (1) wurde numerisch vorgenommen. Der dabei verfolgte Weg wird anhand von zwei Beispielen beschrieben:

1. Beispiel:

Die aufrichtenden Hebelarme eines Schiffes schwanken periodisch um einen Mittelwert (vgl. Bild 5 und 7). Sowohl die Mittelwertkurve als auch die Schwankungskurve lassen sich mit guter Näherung durch Sinusfunktionen beschreiben. Außerdem wirkt ein konstantes Krängungsmoment auf das Schiff (z. B. infolge Winddruck). Die Vorzeichenregelung entspricht untenstehender Skizze. Es sollen z. B. folgende Formeln gelten:

1. Mittelwertkurve: $h_M = -h_0 \cdot \sin 3\varphi$
2. Schwankungskurve: $\Delta h = \mp h_0 \cdot \sin \varphi$
(negatives Vorzeichen: Wellental,
positives Vorzeichen: Wellenberg)
3. Krängungshebel: $h_{Kr} = -0,5 h_0$.

Erfolgt die Schwankung um den Mittelwert nach einer harmonischen Funktion, so gilt für den resultierenden Hebelarm (T_0 = Überholperiode, mit der die Wellen das Schiff überholen):

$$h = -h_0 \cdot \sin 3\varphi - h_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varepsilon \right) - 0,5 h_0.$$

Zwischen dem resultierenden Hebelarm h und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ besteht eine Beziehung, die sich aus der Grundgleichung der Rollbewegung ergibt:

$$I' \cdot \ddot{\varphi} = D \cdot h$$

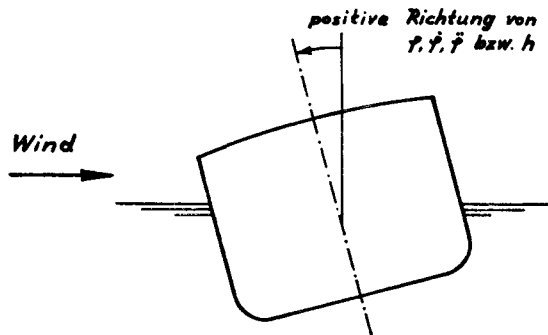
Trägheitsmoment
result. Rückstellmoment

Wegen $I' = D/g \cdot i'^2$ (D = Displacement, $i' = c \cdot B$ = Trägheitsradius [B = Schiffsbreite], g = Erdbeschleunigung) gilt:

$$h = \frac{c^2}{g} B^2 \cdot \ddot{\varphi},$$

so daß man als Bewegungsgleichung die Differentialgleichung erhält:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g \cdot h_0}{c^2 \cdot B^2} \left(-\sin 3\varphi - \sin \varphi \cdot \sin \left[2\pi \frac{t}{T_0} + \varepsilon \right] - 0,5 \right)$$



1. Beispiel

Um einen Überblick über den Einfluß der Anfangslage des Schiffes zur Welle auf den Bewegungsablauf zu bekommen, müssen die Berechnungen für mindestens vier verschiedene Ausgangslagen durchgeführt werden:

- I. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Wellental $L/4$ hinter \otimes
- II. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Schiff im Wellental
- III. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Wellental $L/4$ vor \otimes
- IV. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Schiff im Wellenberg.

Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten

$$\left(\frac{g \cdot h_0}{c^2 \cdot B^2} = K = \text{konstant} \right):$$

- I. $\ddot{\varphi} = K \cdot \left(-\sin 3\varphi - \sin \varphi \cdot \sin \left[2\pi \frac{t}{T_0} \right] - 0,5 \right)$
- II. $\ddot{\varphi} = K \cdot \left(-\sin 3\varphi - \sin \varphi \cdot \cos \left[2\pi \frac{t}{T_0} \right] - 0,5 \right)$
- III. $\ddot{\varphi} = K \cdot \left(-\sin 3\varphi + \sin \varphi \cdot \sin \left[2\pi \frac{t}{T_0} \right] - 0,5 \right)$
- IV. $\ddot{\varphi} = K \cdot \left(-\sin 3\varphi + \sin \varphi \cdot \cos \left[2\pi \frac{t}{T_0} \right] - 0,5 \right)$.

Zur numerischen Integration der obigen Gleichungen ist es erforderlich, die Größen K und T_0 zahlenmäßig vorzugeben. Um dem Ergebnis eine etwas allgemeinere Form zu geben, soll versucht werden, mit nur einer Kenngröße auszukommen. Es gelten folgende Formeln:

$$\text{Wellengeschwindigkeit: } v_W = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

[Es sei Wellenlänge gleich Schiffslänge: $\lambda = L$]

$$\text{Schiffsgeschwindigkeit: } v_S = \sqrt{gL} \cdot Fr$$

[Fr = Froudesche Zahl]

$$\text{Überholgeschwindigkeit: } v_U = v_W - v_S = \frac{L}{T_0}$$

[T_0 = Überholperiode]

Hieraus folgt:

$$T_0 = \frac{\sqrt{\frac{L}{g}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - Fr}$$

Zur Lösung der Differentialgleichungen muß der Zusammenhang zwischen den Größen T_0 und \sqrt{K} bekannt sein.

Es ist:

$$T_0 \cdot \sqrt{K} = \frac{\sqrt{L} \cdot \sqrt{h_0}}{c B \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - Fr \right)}$$

(Ein bei Frachtschiffen üblicher Wert für diese Kenngröße ist: $T_0 \cdot \sqrt{K} = 3,8$ [dieser Zahlenwert wird z. B. in folgendem Fall erreicht: $L = 100$ m; $B = 14,88$ m; $h_0 = 0,25$ m; $c = 0,4$; $Fr = 0,178$]).

Bei der numerischen Integration der Gleichungen wird stets von der gleichen Anfangsbedingung ausgegangen: Zur Zeit $t = 0$ sei $\varphi = \varphi_0$ und $\dot{\varphi} = 0$.

Es wird mit konstanten Schritten $\Delta\varphi$ gerechnet:

$$\varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_1; \varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_2 \text{ usw.}$$

Von folgenden Beziehungen wird Gebrauch gemacht:

$$1. \frac{\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1}{2} \cdot \Delta\varphi \approx \int_0^1 \ddot{\varphi} d\varphi = \int_0^1 \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = \int_0^1 \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}$$

$$\frac{\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1}{2} \cdot \Delta\varphi + \frac{\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2}{2} \cdot \Delta\varphi \approx \int_0^2 \ddot{\varphi} d\varphi = \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} \text{ usw.}$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten erhält man somit:

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{\Delta\varphi (\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}_1)}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \sqrt{\Delta\varphi (\ddot{\varphi}_0 + 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)}$$

$$\dot{\varphi}_3 = \sqrt{\Delta\varphi (\ddot{\varphi}_0 + 2\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3)} \text{ usw.}$$

$$2. \frac{\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1}{2} \cdot \Delta t_1 \approx \int_0^1 \dot{\varphi} dt = \int_0^1 d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \Delta\varphi$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} \cdot \Delta t_2 \approx \int_1^2 \dot{\varphi} dt = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \text{ usw.}$$

Für die Zeitintervalle erhält man:

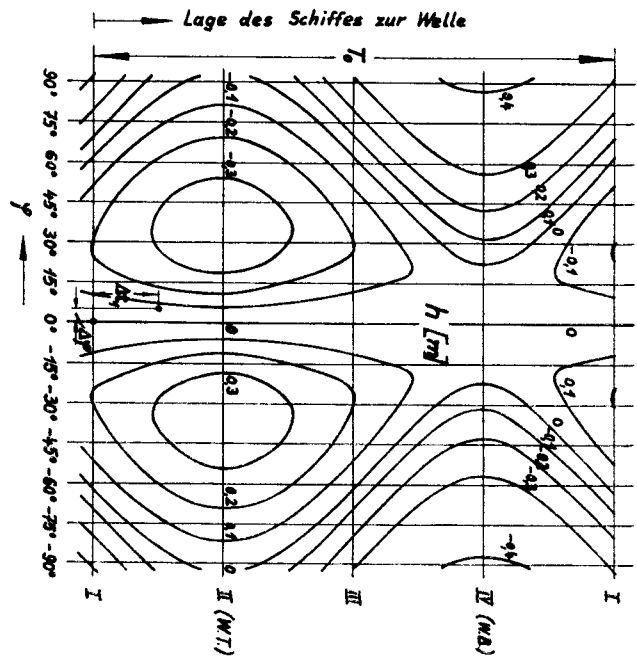
$$\Delta t_1 = \frac{2 \Delta\varphi}{\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1}$$

$$\Delta t_2 = \frac{2 \Delta\varphi}{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2} \text{ usw.}$$

Im einzelnen sieht der Rechengang wie folgt aus:

Für den konstanten Intervallschritt $\Delta\varphi$ wird ein bestimmter Zahlenwert zugrunde gelegt (z. B. $\Delta\varphi = 5^\circ$). Die eigentliche Rechnung beginnt damit, daß aus der vorliegenden Bewegungsgleichung die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\varphi}_0$ und $\ddot{\varphi}_1$ ermittelt werden, wobei für das Zeitintervall Δt_1 zunächst ein geschätzter Wert angenommen wird (z. B.: $\Delta t_1 = 0,2 T_0$). Sodann berechnet man nach den oben angegebenen Formeln die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$ und das Zeitintervall Δt_1 . Im allgemeinen wird der berechnete Wert Δt_1 mit dem zunächst geschätzten Wert nicht übereinstimmen, so daß die Rechnung solange wiederholt werden muß, bis eine Übereinstimmung erzielt worden ist. Die Ermittlung aller weiteren Zeitintervalle $\Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$ usw. erfolgt auf die gleiche Weise. Man gelangt so schließlich zu der gesuchten Weg-Zeit-Kurve der Rollbewegung (vgl. die Kurven in Bild 6 und 8).

Wie bereits Dr. Krappinger erwähnt hat, ist bei diesem numerischen Verfahren der verhältnismäßig große Zeitaufwand von Nachteil. Um aber trotzdem den Einfluß des Seegangs auf die Rollbewegung insbesondere auch bei größeren Neigungen näher studieren zu können, besteht die Absicht, zukünftig derartige Rechnungen mit einem Analogrechner durchzuführen.



2. Beispiel

2. Beispiel:

Für ein Schiff liegen die Seegangshebelarme in Diagrammform vor (vgl. Skizze). Gesucht ist die Weg-Zeit-Kurve der Rollbewegung in Abhängigkeit von der Vorkrägung φ_0 und der Lage des Schiffes zur Welle zur Zeit $t = 0$. Die Überholperiode, mit der die längslaufenden Wellen das Schiff überholen, sei T_0 (z. B. $T_0 = 12$ sec). Die Berechnung der Rollbewegung erfolgt ähnlich wie im ersten Beispiel.

Zuerst wird ein konstanter Intervallschritt $\Delta\varphi$ gewählt (z. B.: $\Delta\varphi = 5^\circ$). Ausgehend von einer bestimmten Anfangslage des Schiffes zur Welle werden dann die den Winkeln φ_0 und $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$ zugeordneten Hebelarme h_0 und h_1 aus dem Hebelarmdiagramm abgelesen. Um die Größe des Hebelarms h_1 ermitteln zu können, muß hierbei zunächst wieder die Zeit Δt_1 geschätzt werden. Mit Hilfe der Gleichung

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{c^2} \cdot B^2 \cdot h$$

werden die den Hebelarmen h_0 und h_1 entsprechenden Winkelbeschleunigungen $\ddot{\varphi}_0$ und $\ddot{\varphi}_1$ berechnet. Es folgt die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$ und des Zeitintervalls Δt_1 nach den bereits im ersten Beispiel angegebenen Formeln. Stimmt die berechnete Zeit mit der geschätzten Zeit Δt_1 nicht überein, so muß dieser Rechengang solange wiederholt werden, bis kein zahlenmäßiger Unterschied mehr besteht. Die der Zeit Δt_1 folgenden Zeitintervalle $\Delta t_2, \Delta t_3$ usw. werden ebenfalls nach diesem Iterationsverfahren bestimmt, so daß schließlich der zeitliche Verlauf der Rollbewegung insgesamt aufgezeichnet werden kann.