

147 | 1965

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dipl.-Ing. W. Kay Meyerhoff

# Die Berechnung hydroelastischer Stöße

**TUHH**

Technische Universität Hamburg-Harburg

# Die Berechnung hydroelastischer Stöße

Dipl.-Ing. W. Kay Meyerhoff, Hamburg<sup>1)</sup>

## Einleitung

Für die Schiffstheorie gewinnen die Probleme der hydrodynamischen Stöße immer mehr an Bedeutung. Unter hydrodynamischen Stößen versteht man die Erscheinungen, die beim Zusammenstoßen eines festen Körpers und einer freien Flüssigkeitsoberfläche auftreten. Solche Stöße kommen bei Schiffen vor allem bei der Fahrt im Seegang vor, wenn sich der Boden des Schiffes aus dem Wasser hebt und anschließend wieder eintaucht. Dieses Einsetzen wird meist mit Slamming bezeichnet. Die hydrodynamischen Stöße sind stets mit großen Kräften verbunden und stellen deswegen eine ernste Gefährdung des Schiffes dar. Es ist daher wünschenswert, genauere Kenntnisse über das Problem der hydrodynamischen Stöße zu erhalten.

Es existiert eine weitentwickelte Theorie für die Behandlung des hydrodynamischen Stoßes starrer Körper. Dagegen ist bisher nur wenig bekannt über das Stoßverhalten elastischer Körper. Es sind nur besonders einfache Systeme behandelt worden, die sich hydrodynamisch genau wie starre Körper verhalten. Für allgemeinere elastische Systeme sind bisher nicht einmal qualitative Aussagen möglich. Es ist nicht bekannt, ob die Vernachlässigung einer vorhandenen Elastizität eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Kräfte und Beanspruchungen ergibt.

In der vorliegenden Arbeit wird deswegen ein Ansatz entwickelt, der es gestattet, den Einfluß der Verformungen eines beliebigen elastischen Körpers auf den hydrodynamischen Stoß zu behandeln. Die Bestimmung der Wechselwirkungen zwischen der Flüssigkeit und dem elastischen Körper ist ein Problem der Hydroelastizität. Deswegen wurde hier der Begriff des „hydroelastischen Stoßes“ eingeführt. Das Problem wird dadurch kompliziert, daß die Eigenschaften des Systems entsprechend der zunehmenden Eintauchung zeitabhängig sind.

Es wird zunächst der Ansatz allgemein formuliert. Dabei wird die Kompressibilität der Flüssigkeit vernachlässigt. Außerdem beschränkt sich der Ansatz auf das zweidimensionale, symmetrische Problem und auf kleine Kielungswinkel. Diese Einschränkungen sind die gleichen, wie sie in den Arbeiten von Th. v. Karman [1] und von H. Wagner [2] gemacht werden. Die wesentlich eingehendere Arbeit von H. Wagner wird dabei zunächst analysiert und dient dann als Grundlage des von mir gebrachten Ansatzes. Er enthält dabei die Ergebnisse von W. Pabst [3, 4] und J. Sydow [5] als Sonderfälle. Es wird gezeigt, daß der Vorschlag von F. Weinig [6] nicht ausreichend ist zur Erfassung der hydroelastischen Wechselwirkungen.

Infolge der Vernachlässigung der Kompressibilität der Flüssigkeit gilt der Ansatz nicht für verschwindende Kielung und führt hier zu unsinnigen Ergebnissen. Andererseits ist die Gültigkeit auf kleine Kielungswinkel beschränkt. Eine Erweiterung für größere Kielungswinkel ist grundsätzlich möglich. Sie erscheint jedoch nicht sinnvoll, weil große Stoßkräfte nur bei kleinen Kielungswinkeln auftreten. Es er-

scheint dem Verfasser gerechtfertigt, die Kompressibilität der Flüssigkeit gegenüber der elastischen Verformbarkeit des Stoßkörpers zu vernachlässigen, insbesondere wenn man Körper betrachtet, bei denen nur dünne Platten im Kontakt mit der Flüssigkeit sind. In der Arbeit von E. Skalak und D. Feit [7] wird gezeigt, daß die Kompressibilität solange vernachlässigbar ist, wie die Machsche Kennzahl, gebildet mit der Geschwindigkeit, mit der sich die eingetauchte Breite ändert, unter 0,25 bleibt. Für die berechneten Beispiele liegt die Machsche Kennzahl bei höchstens 0,03.

In der Theorie von H. Wagner zur Berechnung des hydrodynamischen Stoßes starrer Körper wird ein Ersatzsystem eingeführt. Die Eigenschaften dieses Ersatzsystems werden eingehend behandelt. Dieses Ersatzsystem wird auch für die Erweiterung auf Stöße elastischer Körper verwendet. Es wird für das Ersatzsystem (die ebene tiefgetauchte Platte) eine allgemeine Lösung für den instationären Druck infolge einer beliebigen Beschleunigung an der Platte angegeben. Diesen Druck braucht man für die Erweiterung.

Aus dem allgemeinen Ansatz werden Gleichungen entwickelt zur Berechnung eines bestimmten Typs von elastischen Stoßkörpern. Für einen besonders einfachen Körper dieses Typs werden die Gleichungen numerisch aufgelöst. Die Gleichungen sind ziemlich unübersichtlich, jedoch gelingt es, sie mit Hilfe von Matrizen und dimensionslosen Variablen übersichtlicher darzustellen. Aus der dimensionslosen Darstellung folgt eine Vereinfachung der Modellparameter. Ein elastischer Stoßfall wird im einfachsten Falle durch drei Kenngrößen beschrieben. An Hand der Kenngrößen und der dimensionslosen Variablen lassen sich wichtige Modellgesetze ableiten.

Die numerischen Rechnungen wurden für die elektronische Rechenanlage IBM 650 der Universität Hamburg programmiert. Es wurden mehrere Beispiele berechnet.

Besondere Aufmerksamkeit wurde der Fehlerabschätzung und der Prüfung der für die numerische Auflösung benutzten Näherungen gewidmet. In der hier vorliegenden gekürzten Fassung werden die umfangreichen Überlegungen nicht wiedergegeben.

Die Ergebnisse von fünf Beispielen sind graphisch dargestellt. Zum Vergleich sind auch Ergebnisse für starre Modelle nach der Theorie von H. Wagner und für elastische Modelle des von J. Sydow behandelten Typs aufgetragen.

## I. Formulierung des allgemeinen Ansatzes für den hydrodynamischen Stoß eines elastischen Körpers auf eine inkompressible Flüssigkeit

### A. Analyse des Wagnerschen Ansatzes für starre Körper

In der vorliegenden Untersuchung soll der von H. Wagner entwickelte Ansatz zur Berechnung des hydrodynamischen Stoßes starrer Körper so erweitert werden, daß die Behandlung des hydrodynamischen Stoßes von elastischen — und grundsätzlich auch von plastischen — Körpern möglich wird. Dazu wird zunächst der Ansatz von H. Wagner beschrieben und analysiert.

<sup>1)</sup> Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigte Dissertation (gekürzte Fassung). Bericht: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Weinblum und Prof. Dr.-Ing. E. Pestel. Eingereicht am 23. 10. 1963, mündliche Prüfung am 19. 6. 1964, Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. K. Wendel.

Es wird eine bestimmte Form von hydrodynamischen Stößen behandelt, die durch folgende sechs Voraussetzungen beschrieben wird:

- Es wird nur der Fall betrachtet, daß ein fester Körper auf die freie Oberfläche einer unendlich ausgedehnten, ruhenden Flüssigkeit trifft.
- Die Bewegungsrichtung des festen Körpers ist normal zur ungestörten Flüssigkeitsoberfläche.
- Der feste Körper ist symmetrisch zu einer Achse, die senkrecht auf der ungestörten Flüssigkeitsoberfläche steht.
- Es wird nur das zweidimensionale Problem behandelt.
- Der Kielungswinkel ist klein — das ist der Winkel zwischen der Körperoberfläche und der ungestörten Flüssigkeitsoberfläche.
- Die Bodenform ist so wenig konkav, daß es während des ganzen Stoßvorgangs genau zwei Spritzerwurzeln gibt, die symmetrisch zueinander liegen.

Über die Flüssigkeit wird vorausgesetzt, daß es sich um eine reibungsfreie, inkompressible und schwerelose Flüssigkeit ohne Oberflächenspannung handelt. Schließlich wird angenommen, daß der feste Körper als vollkommen starr anzusehen ist.

Es werden jetzt die Bedingungen zusammengestellt, denen die Strömung unter den oben aufgezählten Voraussetzungen gehorcht:

- Da die Flüssigkeit vor dem Stoß in Ruhe ist und vorausgesetzt wird, daß die Flüssigkeit reibungsfrei ist, so muß die Strömung dauernd drehungsfrei bleiben. Es existiert ein Geschwindigkeitspotential.
- Es muß die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein. Die vom eindringenden Körper verdrängte Flüssigkeit muß neben dem eingetauchten Teil in Form einer Welle und eines Spritzers erscheinen.
- Aus den Bedingungen der Drehungsfreiheit und Inkompressibilität läßt sich ableiten, daß die Länge der freien Oberfläche zeitlich konstant ist.
- An der freien Oberfläche ist der Druck gleich dem Atmosphärendruck. Dabei ist die Lage der freien Oberfläche nicht bekannt.
- An der Körperoberfläche muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeit relativ zur Körperoberfläche verschwinden.

Diese Bedingungen sind unangenehm, weil die nichtlineare Bernoulli-Gleichung an der zunächst unbekanntem Kontur der freien Oberfläche erfüllt werden muß. Lösungen des so formulierten Problems sind für einen Sonderfall, nämlich für einen geraden Keil und für konstante Eintauchgeschwindigkeit, von H. Wagner [2] und J. D. Pierson [8] numerisch ermittelt worden. Der Sonderfall ist besonders einfach, weil die Strömung zu allen Zeiten eine Ähnlichkeitsbedingung erfüllt. Für einen allgemeinen zeitlichen Verlauf der Eintauchgeschwindigkeit und für allgemeine Körperformen gilt die Ähnlichkeitsbedingung nicht. Es sind hierfür bisher keine Lösungen bekannt geworden. Die numerische Lösung von J. D. Pierson für den Kielungswinkel von  $\beta = 20^\circ$  wird später zur Beurteilung des vereinfachten Ansatzes benutzt.

Zur Behandlung allgemeinerer Fälle wird nämlich ein vereinfachter Ansatz gemacht, bei dem die Bedingungen der freien Oberfläche nur angenähert erfüllt werden. Die Näherung besteht darin, daß die freie Oberfläche durch eine hori-

zontale Ebene ersetzt wird, an der die Strömung gespiegelt wird. Man hat damit das Problem des Stoßes angenähert zurückgeführt auf das Problem eines Körpers in allseitig unbegrenzter Flüssigkeit. Bei der Berechnung des Stoßes berücksichtigt man nur die Kräfte auf die ursprüngliche Hälfte des so gebildeten Ersatzsystems. Die Spiegelungsbedingung ist derart, daß die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit ihr Vorzeichen umkehrt, die Vertikalkomponente ihr Vorzeichen behält.

Der Ersatzkörper hat im allgemeinen Ähnlichkeit mit einem flachen Rhombus. Th. v. Karman und H. Wagner haben als weitere Vereinfachung den flachen rhombenähnlichen Körper durch eine Platte von gleicher Breite angenähert. In einer Erweiterung der Theorie für größere Kielungswinkel haben R. L. Bisplinghoff und C. S. Doherty [9] Rhomben benutzt mit gleichem Seitenverhältnis. Zu den gleichen Ergebnissen kommt auch R. J. Monaghan [10]. Die Ergebnisse in beiden Arbeiten enthalten den gleichen Fehler. Die Rechnungen sind vom Verfasser korrigiert worden. Es werden hier nur die korrekten Ergebnisse benutzt. Von A. G. Fabula [11] wurde der eingetauchte Teil durch umschriebene Ellipsen approximiert. Für kleine Kielungswinkel ist der Unterschied zwischen den verschiedenen Näherungen gering.

Der Ansatz macht es erforderlich festzulegen, wie weit der Körper als eingetaucht anzusehen ist. Als Begrenzung des eingetauchten Teils kommt zweckmäßigerweise die Spritzerwurzel in Betracht — das ist der Bereich, in dem der Spritzer ansetzt —. Dabei ist aber die Spritzerwurzel kein genau festgelegter Punkt. Zur angenäherten Bestimmung der eingetauchten Breite wird von Wagner folgende Betrachtung angestellt:

Aus dem Ersatzsystem kennt man angenähert die Geschwindigkeiten, mit denen die freie Oberfläche neben dem eintauchenden Stoßkörper aufsteigt. Durch Integration über die Zeit erhält man die Lage der freien Oberfläche und kann ermitteln, wann diese die Körperoberfläche erreicht. Daraus läßt sich die Beziehung zwischen der Eintauchung des Stoßkörpers und der eingetauchten Breite ableiten. Diese Beziehung ist für den starren Körper nur von der Geometrie der Körperoberfläche abhängig. Durch die Vernachlässigung des Spritzers im Ersatzsystem ist die so berechnete eingetauchte Breite eine genau festgelegte Größe.

Zur Beurteilung dieses Verfahrens soll ein Vergleich angestellt werden, und zwar werden die Ergebnisse für die eingetauchte Breite eines geraden Keils mit einem Kielungswinkel von  $\beta = 20^\circ$  nach den verschiedenen Autoren verglichen. Der ziemlich große Winkel von  $\beta = 20^\circ$  mußte gewählt werden, weil dies der kleinste Winkel ist, für den J. D. Pierson numerische Lösungen für die exakte Randbedingung

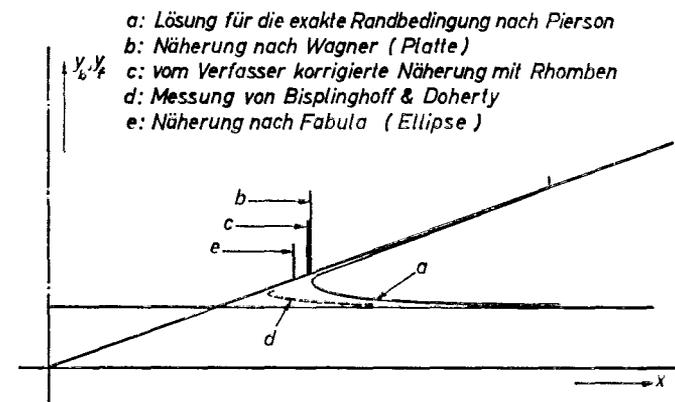


Diagramm 1 Vergleich der Ergebnisse für die eingetauchte Breite bei  $\beta = 20^\circ$

berechnet hat. Der Vergleich ist im Diagramm 1 graphisch dargestellt. Das Diagramm enthält folgende Ergebnisse:

- a) Die Kontur der freien Oberfläche einschließlich des Spritzers nach Pierson.
- b) Die eingetauchte Breite nach H. Wagner.
- c) Die eingetauchte Breite nach den Rechnungen des Verfassers für einen Rhombus.
- d) Die freie Oberfläche nach den Messungen von R. L. Bisplinghoff und C. S. Doherty.
- e) Die eingetauchte Breite nach A. G. Fabula.

Man erkennt die sehr gute Übereinstimmung zwischen der Breite nach Pierson und der Näherung von Wagner sowie der Rechnung des Verfassers für den Rhombus. Andererseits fällt die starke Abweichung der Näherung mit Hilfe von Ellipsen von Fabula auf, wobei offensichtlich die Kontinuitätsbedingung nicht erfüllt ist. Am meisten überrascht jedoch das starke Abweichen der gemessenen freien Oberfläche. Auch hier ist die Kontinuitätsbedingung nicht erfüllt. Dies weist darauf hin, daß bei den Versuchen dreidimensionale Ausgleichsströmungen um die Stirnflächen der nicht sehr langen Modelle vorhanden gewesen sind, die man auch auf den veröffentlichten Photos erkennt. Deswegen sind die Messungen nicht geeignet zur Beurteilung der Ersatzsysteme.

Dieser Vergleich zeigt, daß das von Wagner angegebene Verfahren zur Berechnung der eingetauchten Breite sehr befriedigend ist.

Im folgenden werden die weiteren Eigenschaften des Wagnerschen Ersatzsystems untersucht.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung des Stoßkörpers geht man nach v. Karman und Wagner in der Weise vor, daß man sagt: Die hydrodynamischen Kräfte lassen sich mit Hilfe der hydrodynamischen Massen beschreiben; und zwar benutzt man die hydrodynamische Masse des Ersatzsystems. Auf das System von Körpermasse und eintauchungsabhängiger hydrodynamischer Masse wird der Impulssatz angewendet.

Bei einem symmetrischen Körper mit symmetrischer Anströmung treten in unendlich ausgedehnter, idealer Flüssigkeit keine stationären Kräfte auf. Es lassen sich also alle auftretenden Kräfte durch hydrodynamische Massen beschreiben. Bei dem Ersatzkörper (der einen Plattenseite) sind die Verhältnisse anders. Hier tritt außer der instationären Kraft eine unendlich große stationäre Saugkraft auf. Es ist zwar durch das Ersatzsystem bedingt, daß diese Kraft unendlich groß ist. Eine vom Verfasser durchgeführte Analyse der Ergebnisse von Pierson zeigt jedoch, daß auch bei Erfüllung der exakten Randbedingung eine sehr große stationäre Saugkraft auftritt.

Der Unterschied zwischen dem Ersatzsystem und der Lösung für die exakte Randbedingung besteht darin, daß im zweiten Fall der großen stationären Saugkraft eine noch größere instationäre Druckkraft gegenübersteht, so daß daraus eine Druckkraft resultiert. Dabei ist die instationäre Kraft nach Pierson um ein Vielfaches größer als diejenige aus dem Ersatzsystem. Dagegen ist die instationäre Kraft des Ersatzsystems annähernd so groß wie die resultierende Kraft nach Pierson.

Bei einem Kielungswinkel von  $\beta = 20^\circ$  ist sie allerdings um etwa 44 % zu groß. Benutzt man das Ersatzsystem von A. G. Fabula (Ellipse), so ist die Übereinstimmung besser. Das ist aber hauptsächlich auf die kleinere eingetauchte Breite zurückzuführen. Man kann vermuten, daß bei kleineren Kielungswinkeln der Fehler geringer ist.

Man erhält also eine gute Näherung für die resultierende Kraft auf den Stoßkörper, wenn man nur die resultierende Kraft des Ersatzsystems benutzt. Diese Formulierung ist in

ihrer Wirkung gleichbedeutend mit der oben gebrachten, sie weist jedoch darauf hin, daß bei der Verwendung des Ersatzsystems gewisse Vorsicht geboten ist.

Das Ersatzsystem liefert auch recht gute Aussagen über die Verteilung des Drucks. Es ergeben sich wesentliche Unterschiede nur in der Nähe der Spritzerwurzel. Aus dem Ersatzsystem errechnet man für  $x = c$  einen unendlich großen Druck. Dagegen ergibt sich nach Pierson hier eine ausgeprägte Druckspitze. Nach einer besonderen Betrachtung von H. Wagner erhält man für diese Druckspitze eine Abschätzung durch den Staudruck der Geschwindigkeit  $\dot{c}$ , also durch  $\rho/2 \cdot \dot{c}^2$ , wobei  $\dot{c}$  die Geschwindigkeit der Spritzerwurzel ist. Dieser Druck ist umgekehrt proportional dem Quadrat des Winkels  $\beta$ , er wird also für kleine Kielungswinkel sehr groß.

Der unendlich große Druck aus dem Ersatzsystem macht bei den Rechnungen keine Schwierigkeiten, weil man nur Integrale über die Druckverteilung benötigt, die alle existieren. Außerdem stellt die Rechnung wegen der guten Konvergenz keine sehr hohen Anforderungen an die genaue Form der Druckverteilung.

#### B. Aufstellung allgemeiner Gleichungen zur Berechnung des hydrodynamischen Stoßes von elastischen Körpern

Für die Erweiterung der Theorie auf elastische Körper werden die gleichen Voraussetzungen wie im Abschnitt I. A. gemacht. Insbesondere wird weiterhin vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit inkompressibel ist. Nur die Annahme, daß der Stoßkörper vollkommen starr ist, wird fallen gelassen. Stattdessen wird angenommen, daß der Körper unter den hydrodynamischen Drücken elastische Verformungen erfährt, die von gleicher Größenordnung sind, wie die Abweichung der Körperkontur von der Horizontalen.

Die Theorie wurde aus folgendem Grunde in dieser Richtung erweitert:

Es interessieren für die Anwendung insbesondere hydrodynamische Stöße von Körpern, die aus dünnen Blechen gebaut sind, wie z. B. Schiffe, Flugzeugschwimmer u. a. Bei solchen Körpern ist die elastische Verformbarkeit der Bodenplatten wesentlich größer als die Kompressibilität der Flüssigkeit. Man kann erwarten, daß die Beeinflussung des Stoßes durch die elastischen Verformungen größer ist als durch die Kompressibilität der Flüssigkeit. Deswegen erschien es gerechtfertigt, eher die Kompressibilität der Flüssigkeit zu vernachlässigen. Nach der Veröffentlichung von Skalak und Feit [7] ist die Kompressibilität der Flüssigkeit solange zu vernachlässigen, wie die Machsche Kennzahl, die gebildet ist mit der Geschwindigkeit der Spritzerwurzel  $\dot{c}$ , kleiner ist als 0,25. Es wird für die Untersuchungen vorausgesetzt, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Es wird später gezeigt, daß für die behandelten Beispiele die Machsche Kennzahl wesentlich kleiner ist.

Durch die Vernachlässigung der Kompressibilität gelten die Untersuchungen nur für endliche Kielung. Die Erweiterung der Theorie auf elastische Körper und kompressible Flüssigkeit ist ein wesentlich schwierigeres Problem. Die Erkenntnisse dieser Untersuchung werden dafür sicher wertvoll sein.

Wir kommen jetzt zur Beschreibung des hydrodynamischen Problems:

Von F. Weinig [6] wurde der Vorschlag gemacht, die elastischen Verformungen in der Weise zu berücksichtigen, daß man die Gleichungen von H. Wagner auf einen starren Körper anwendet, der die gleiche Form hat wie der verformte elastische Körper. Dieser Vorschlag ist jedoch unzureichend. Man hat vielmehr zu berücksichtigen, daß durch die zeitlich

veränderliche Belastung die Verformung auch zeitabhängig ist. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Körperoberfläche sind von gleicher Größenordnung wie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körperschwerpunktes. Dies folgt aus der Voraussetzung über die Größe der Verformungen.

Für die Strömung existiert ein Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ , das sich annähernd bestimmen läßt mit Hilfe des Ersatzsystems aus dem Ansatz für starre Körper. Dieses Ersatzsystem läßt sich auch weiterhin benutzen, da die Verformungen von gleicher Größenordnung wie die Ordinaten der Bodenkontur sind. Der verformte Körper hat also immer noch kleine Kielungswinkel. Das Ersatzsystem ist auch deswegen weiterhin verwendbar, weil bei den vorkommenden Integralen die Einzelheiten der Druckverteilung nur geringen Einfluß haben.

Da in dem Ersatzsystem die Randbedingungen linearisiert sind, läßt sich das Geschwindigkeitspotential aufspalten in Anteile, die sich unabhängig voneinander bestimmen lassen. Es ist zweckmäßig, folgende Aufteilung vorzunehmen:

Der erste Teil  $\Phi_1$  beschreibt die Strömung infolge der Translation des als starr angesehenen verformten Stoßkörpers.

Der andere Teil  $\Phi_2$  beschreibt dann die Strömung infolge der Geschwindigkeiten der Körperoberfläche gegenüber der oben benutzten Lage.

Durch den Vorschlag von F. Weinig würde also nur  $\Phi_1$  berücksichtigt werden.

In Bild 1 ist die Bedeutung der benutzten Koordinaten zu erkennen.

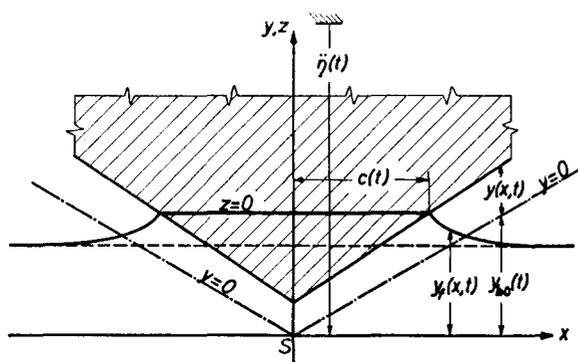


Bild 1

$\eta(t)$  bezeichnet die Lage des Bezugspunktes S in einem raumfesten Koordinatensystem.  $\eta$  wird positiv in die Flüssigkeit hinein gerechnet. In Bild 1 ist S die Spitze des unverformten Stoßkörpers.  $y(x, t)$  ist die Verformung der Körperoberfläche gegenüber dem Bezugspunkt S.  $y = 0$  bezeichnet die Oberfläche des unverformten Körpers.  $y$  wird normal zur Körperoberfläche gemessen; diese Richtung fällt bei kleinen Kielungswinkeln praktisch mit der Vertikalen zusammen.  $y$  zählt positiv in den Körper hinein. Damit ist  $y$  in entgegengesetzter Richtung definiert wie  $\eta$ . Die Koordinaten  $y_b$  und  $y_f$  sind auf den Punkt S bezogen.  $y_{b0}(x)$  ist die Kontur des unverformten,  $y_b(x, t) = y_{b0}(x) + y(x, t)$  diejenige des verformten Körpers.  $y_f(x, t)$  ist die Kontur der freien Oberfläche. Dagegen soll  $z$  die vertikalen Ordinaten im Ersatzsystem bezeichnen. Es ist auf die Lage des Ersatzsystems (Platte) bezogen.  $x$  bezeichnet immer die horizontale Koordinate.  $x = c(t)$  ist die halbe eingetauchte Breite.

Es wurde unter  $f$  im Abschnitt I. A. vorausgesetzt, daß die Funktion  $c(t)$  genau doppeldeutig ist, wobei die Funktionswerte dem Betrage nach gleich sind. Dann ist  $t(c)$  eindeutig.

Es sollen jetzt die allgemeinen Gleichungen aufgestellt werden:

Man kann für das Potential  $\Phi$  formal schreiben:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_1(x, z, t, \dot{\eta}(t), c(t)) + \Phi_2(x, z, t, \dot{y}(x, t), c(t)). \quad (1)$$

Da wir das gleiche Ersatzsystem benutzen wollen wie beim Wagnerschen Ansatz für starre Körper, haben wir uns auf die instationären Drücke zu beschränken. Es lassen sich die Drücke infolge  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  linear überlagern. Es gilt dann für den Druck an der Körperoberfläche:

$$p_i(x, t) = \rho \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=0} + \rho \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{z=0}$$

Bei der Ableitung ist zu beachten, daß sowohl  $\dot{\eta}$  und  $\dot{y}$  als auch  $c$  Funktionen der Zeit sind. Man hat deswegen formal zu schreiben:

$$p_i(x, t) = \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(x, 0, t, \dot{\eta}(t), \ddot{\eta}(t), c(t), \dot{c}(t)) + \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(x, 0, t, \dot{y}(x, t), \ddot{y}(x, t), c(t), \dot{c}(t)) \quad (2)$$

für  $|x| \leq c(t)$   
 $p_i(x, t) = 0$  für  $|x| > c(t)$ .

Es gilt für die Bewegung des Bezugspunktes:

$$\int_{-c}^{+c} p_i(x, t) dx + \int_{-L}^{+L} k(x, t) dx - K(t) - \int_{M_1, M_2} \ddot{y} dm = (M_1 + M_2) \ddot{\eta}(t). \quad (3)$$

Dabei steht  $K(t)$  für etwa vorhandene, auf das gesamte System wirkende Kräfte (z. B. Schwerkraft),  $k(x, t)$  steht für weitere auf die Oberfläche des Körpers wirkende Drücke (z. B. Auftrieb).  $\int \ddot{y} dm$  steht für die Beschleunigungskräfte der einzelnen Teile des elastischen Modells infolge ihrer Beschleunigungen gegenüber dem Bezugspunkt S.  $M_1 + M_2$  ist die Gesamtmasse des Körpers je Längeneinheit. Man benötigt als Anfangsbedingungen  $\eta(t_0)$  und  $\dot{\eta}(t_0)$ .

Die Verformungen des Körpers lassen sich formal in der Form schreiben:

$$y(x, t) = f(x, t, p_i(x, t), k(x, t), \ddot{\eta}(t)). \quad (4)$$

Die Funktion  $f$  ergibt sich praktisch immer aus einer Differentialgleichung, für die man die Anfangsbedingungen  $y(x, t_0)$  und  $\dot{y}(x, t_0)$  braucht.

Zur Berechnung der eingetauchten halben Breite  $c$  hat man zu ermitteln, wann die freie Oberfläche  $y_f$  für einen bestimmten Wert  $x$  die Körperoberfläche  $y_b$  erreicht. Die Ordinaten der freien Oberfläche erhält man durch folgende Integration:

$$y_f(x, t) = - \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, 0, t') dt'$$

Die freie Flüssigkeitsoberfläche  $y_f$  erreicht die Körperoberfläche  $y_b$  an der Stelle  $x = c$  zur Zeit  $t(c)$ . Es gilt dann  $y_f(c, t(c)) = y_b(c, t(c))$ . Beachtet man, daß  $y_b = y_{b0} + y$  ist, so ist:

$$y_{b0}(c) + y(c, t(c)) = - \int_{t_0}^{t(c)} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, 0, t') dt'$$

Es wird wie bei H. Wagner eine Funktion  $U(t)$  eingeführt:

$$U(t) = \frac{\dot{\eta}(t)}{\dot{c}(t)}. \quad (5)$$

Damit gilt unter Benutzung von Gleichung (1):

$$y_{10}(c) + y(c, t(c)) = \int_{c(t_0)}^c \frac{1}{\dot{\eta}(t(c'))} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) U(t(c')) dc'. \quad (6)$$

Im Gegensatz zu der Funktion  $u(c)$  bei Wagner hat  $U$  im vorliegenden Problem keine universelle Bedeutung. Für starre Körper ist  $u(c)$  nur von der Gestalt des Stoßkörpers abhängig und kann im Vorwege bestimmt werden. Dies liegt daran, daß  $\Phi_1$  proportional  $\dot{\eta}$  ist. Die Integralgleichung ist dabei durch einen Reihenansatz lösbar. Bei elastischen Körpern ist  $U(t)$  nicht vorher zu berechnen. Es stellt hier lediglich eine Hilfsgröße dar, um die Integralgleichung übersichtlich schreiben zu können.

Zur Berechnung von  $c(t)$  benötigt man die Anfangsbedingungen  $c(t_0)$ .

Die Gleichungen (1) bis (6) enthalten in formaler Schreibweise die gegenseitige Beeinflussung des hydrodynamischen und des elastischen Teils des Problems.

## II. Aufstellung der Grundgleichungen für den hydroelastischen Stoß

### A. Lösung des hydrodynamischen Teilproblems

#### 1. Allgemeine Überlegungen

Für den hydrodynamischen Teil des Problems soll von jetzt ab ein Koordinatensystem benutzt werden, in dem der Bezugspunkt  $S$  des Stoßkörpers ruht. Das bedeutet, daß wir den Körper als ruhend betrachten, wobei der Wasserspiegel mit der Geschwindigkeit  $\dot{\eta}(t)$  steigt. Es zählt jetzt  $\eta$  positiv nach oben.

$\Phi_1$  ist das Geschwindigkeitspotential einer Platte mit der Breite  $2c(t)$ , die mit der Geschwindigkeit  $\dot{\eta}(t)$  senkrecht angeströmt wird.  $\Phi_2$  ist das Geschwindigkeitspotential einer Platte mit der Breite  $2c(t)$ , deren Normalgeschwindigkeit  $\dot{y}(x, t)$  ist.

$\Phi_1$  soll direkt angegeben werden:

$$\Phi_1(x, z, t) = \dot{\eta}(t) \sqrt{\frac{1}{2} [(c^2(t) - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 + c^2(t) - x^2 + z^2]} \quad \text{für } z \leq 0$$

dann ist:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(x, 0, t) = \dot{\eta}(t) \cdot c(t) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c(t)}\right)^2}} + \dot{\eta}(t) \cdot c(t) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c(t)}\right)^2} \quad \text{für } |x| \leq c(t) \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(x, 0, t) = -\dot{\eta}(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c(t)}{x}\right)^2}} \quad \text{für } |x| > c(t). \quad (8)$$

Man kann es sich ersparen,  $\Phi_2$  zu bestimmen. Es wird einfacher sein, die Ableitungen  $\partial \Phi_2 / \partial t$  und  $-\partial \Phi_2 / \partial z$  zu ermitteln.

#### 2. Darstellung der Strömung infolge $\dot{y}(x, t)$

Durch die Bewegung der Platte ist die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit an der Platte vorgegeben:

$$\dot{y}(x, t) = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, 0, t) \quad \text{für } |x| \leq c(t).$$

Diese Randbedingung soll an der unverformten Platte erfüllt werden. Wegen der Symmetrievoraussetzung ist  $\dot{y}(x, t)$  eine gerade Funktion. Es soll jedoch zunächst die Lösung für eine beliebige Funktion  $\dot{y}$  bestimmt werden.

Die durch die obige Randbedingung erzeugte Strömung läßt sich darstellen durch eine Wirbelbelegung  $\gamma(x, t)$  auf der Platte. Die Festsetzung der Bezeichnungen wird aus Bild 2 deutlich.

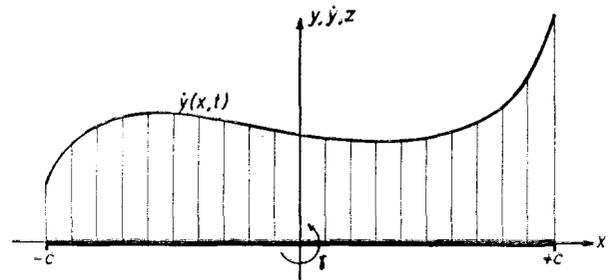


Bild 2

Es gilt:

$$\dot{y}(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{\gamma(x', t)}{x' - x} dx'. \quad (9)$$

Diese Integralgleichung läßt sich geschlossen lösen (vgl.: W. Schmeidler [12], S. 48 ff.). Diese Lösung bietet keine Vorteile für die numerische Behandlung. Dafür empfiehlt sich ein Reihenansatz, der dem von H. Glauert [13] zur Berechnung von Tragflügelprofilen nachgebildet ist. Es wird in Gleichung (9) substituiert:

$$x' = c \cdot \cos \varphi; \quad x = c \cdot \cos \psi \quad (10)$$

damit gilt:

$$\dot{y}(x(\psi), t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(x'(\varphi), t) \sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi. \quad (11)$$

Der Lösungsansatz für die Wirbelbelegung  $\gamma$  hat folgende Form:

$$\gamma(x(\psi), t) = -2 \left\{ a_0(t) \frac{\cos \psi}{\sin \psi} + a_1(t) \frac{\cos 2\psi}{2 \sin \psi} - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \sin m\psi \right\}. \quad (12)$$

Der erste Term beschreibt die symmetrische, der zweite Term die antisymmetrische Kantenumströmung. Setzt man diesen Ansatz in Gleichung (11) ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \dot{y}(x(\psi), t) = & \frac{1}{\pi} \left\{ a_0(t) \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi + \right. \\ & + a_1(t) \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi - \\ & - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \frac{\cos(m-1)\varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi - \right. \\ & \left. \left. - \int_0^\pi \frac{\cos(m+1)\varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi \right] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Der Cauchysche Hauptwert für die Integrale in Gleichung (13) ist nach H. Glauert:

$$\oint_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\varphi = \pi \frac{\sin m\psi}{\sin \psi}.$$

Damit folgt aus Gleichung (13):

$$\dot{y}(x(\psi), t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \cos m\psi. \quad (14)$$

Alle in den Gleichungen (12) und (14) vorkommenden Funktionen sind Tschebyscheff-Polynome erster oder zweiter Art (siehe Jahnke-Emde-Lösch [17], S. 96 ff.). Man kann schreiben:

$$\gamma(x, t) = -2 \left\{ a_0(t) \frac{T_1\left(\frac{x}{c}\right)}{U_1\left(\frac{x}{c}\right)} + a_1(t) \frac{T_2\left(\frac{x}{c}\right)}{2U_1\left(\frac{x}{c}\right)} - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) U_m\left(\frac{x}{c}\right) \right\}; \quad |x| \leq c \quad (12a)$$

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) T_m\left(\frac{x}{c}\right); \quad |x| \leq c. \quad (13a)$$

Dieses Ergebnis ist folgendermaßen zu deuten: Man hat die Geschwindigkeit  $\dot{y}(x, t)$  nach Tschebyscheff-Polynomen erster Art im Bereich  $|x/c| \leq 1$  zu entwickeln, oder was gleichbedeutend ist: man führt eine Koordinatentransformation nach Gleichung (10) durch und entwickelt die transformierte Funktion in eine Fourierreihe. Die so gefundenen Koeffizienten  $a_m(t)$  werden in die Gleichung (12a) eingesetzt. Damit ist dann die Wirbelbelegung  $\gamma$  zur Beschreibung der Strömung bekannt.

Zur Berechnung des instationären Drucks an der Platte ist es zweckmäßig, die Strömung durch eine Dipolbelegung auf der Platte darzustellen. Man kann die Wirbelbelegung zu einer Dipolbelegung integrieren. Es muß die Dipolbelegung an den Rändern der Platte verschwinden. Dies ist erfüllt, wenn man schreibt:

$$m(x, t) = \int_{-c}^x \gamma(x', t) dx'. \quad (15)$$

Es ergibt sich bei der Integration:

$$m(x(\psi), t) = 2c \left\{ a_0(t) \sin \psi + a_1(t) \frac{1}{2} \sin 2\psi - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \left[ \frac{\sin(m-1)\psi}{2m-2} - \frac{\sin(m+1)\psi}{2m+2} \right] \right\} \quad (16)$$

$$m(x, t) = 2c \left\{ a_0(t) U_1\left(\frac{x}{c}\right) + a_1(t) \frac{1}{2} U_2\left(\frac{x}{c}\right) - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \left[ \frac{1}{2m-2} U_{m-1}\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{2m+2} U_{m+1}\left(\frac{x}{c}\right) \right] \right\}. \quad (16a)$$

Damit ist auch die Dipolbelegung auf der Platte zur Darstellung der Strömung bekannt.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie sich die Vertikalgeschwindigkeiten in der Plattenebene neben der Platte berechnen lassen:

Man hat dazu Gleichung (9) zu lösen für  $|x| > c$ . Dabei wird jetzt  $\gamma(x, t)$  als bekannt vorausgesetzt.

Man substituiert zweckmäßigerweise:

$$x' = c \cdot \cos \varphi; \quad x = c \cdot \cosh \psi. \quad (17)$$

Man erhält in Analogie zu Gleichung (13):

$$-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x(\psi), 0, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ a_0(t) \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \cosh \psi} d\varphi + a_1(t) \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi - \cosh \psi} d\varphi - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \frac{\cos(m-1)\varphi}{\cos \varphi - \cosh \psi} d\varphi - \int_0^\pi \frac{\cos(m+1)\varphi}{\cos \varphi - \cosh \psi} d\varphi \right] \right\}. \quad (18)$$

In genauer Analogie zur Ableitung von H. Glauert läßt sich zeigen, daß:

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi}{\cos \varphi - \cosh \psi} d\varphi = -\frac{\pi}{\sinh \psi} (\cosh m\psi - \sinh m\psi). \quad (19)$$

Man erhält nach einigen Umformungen aus Gleichung (18):

$$-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x(\psi), 0, t) = -a_0(t) [\coth \psi - 1] - a_1(t) \left[ \frac{1}{2 \sinh \psi} - e^{-\psi} \right] + \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) e^{-m\psi}. \quad (20)$$

Durch Substitution von Gleichung (17) ergibt sich schließlich:

$$-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, 0, t) = -a_0(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{1-(c/x)^2}} - 1 \right] - a_1(t) \left[ \frac{c/x}{2\sqrt{1-(c/x)^2}} - \frac{c/x}{1+\sqrt{1-(c/x)^2}} \right] + \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \left[ \frac{c/x}{1+\sqrt{1-(c/x)^2}} \right]^m. \quad (20a)$$

### 3. Berechnung des instationären Drucks an der Platte

Nach dem Satz von W. E. Cummins [14] ist die instationäre Kraft  $\vec{P}_i$  auf einen durch Dipole dargestellten Körper entgegengesetzt und proportional der zeitlichen Ableitung des Dipolmoments  $\vec{M}$ .

$$\vec{P}_i = -\rho \frac{d\vec{M}}{dt}.$$

Für die Platte läßt sich dieser Satz auch auf den Zusammenhang zwischen dem instationären Druck und der Dipolbelegung übertragen. Diese Übertragung ist möglich, weil für die Platte die Dipoldarstellung eindeutig ist und weil die Kräfte an den Dipolen selbst angreifen. Man kann schreiben:

$$p_i = \pm \frac{1}{2} \rho \frac{\partial m}{\partial t}. \quad (21)$$

Es gilt das positive Vorzeichen an der Oberseite der Platte, das negative an der Unterseite. Für den hydrodynamischen Stoß interessiert nur der Druck an der Plattenunterseite. Deswegen wird im folgenden immer das Minuszeichen in Gleichung (21) benutzt.

Zur Berechnung des instationären Drucks an der Platte hat man also die Ableitung  $\partial m / \partial t$  zu bilden. Die Dipolbelegung liegt immer in der Form von Gleichung (16) vor. Bei der Differentiation ist zu beachten, daß sowohl die Koeffizienten  $a_m(t)$  als auch die halbe Breite  $c(t)$  und daher auch  $\psi$  Funktionen der Zeit sind. Es gilt für die Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(x(\psi), t) &= 2 \dot{c} \left\{ a_0(t) \sin \psi + a_1(t) \frac{1}{4} \sin 2\psi - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-1)\psi}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\psi}{m+1} \right] \right\} + \\ &\quad + 2 \dot{c} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \left\{ a_0(t) \cos \psi + a_1(t) \frac{1}{2} \cos 2\psi - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} [\cos(m-1)\psi - \cos(m+1)\psi] \right\} + \\ &\quad + 2 c \left\{ \frac{da_0(t)}{dt} \sin \psi + \frac{da_1(t)}{dt} \frac{1}{4} \sin 2\psi - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-1)\psi}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\psi}{m+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung läßt sich in zwei Anteile aufspalten. Der eine Teil ist bedingt durch die zeitliche Änderung der halben Breite  $c(t)$ , der andere Teil wird durch die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten  $a_m(t)$  verursacht. Damit entspricht der erste Teil dem ersten Term von Gleichung (7) und der zweite Teil dem zweiten Term von (7).

Wir betrachten zunächst den zweiten Teil von Gleichung (22). Er soll durch den Index  $a$  gekennzeichnet werden:  $(\partial m / \partial t)_a$ .

In der gleichen Weise, wie die Koeffizienten  $a_m(t)$  aus der Geschwindigkeit  $\dot{y}(x, t)$  berechnet werden, erhält man die Koeffizienten  $b_m(t) = da_m(t) / dt$  aus der Beschleunigung  $\ddot{y}(x, t)$ . Es gilt also:

$$\ddot{y}(x(\psi), t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) \cos m\psi \quad (23)$$

$$\ddot{y}(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) T_m(x/c) \quad \text{in } |x| \leq c. \quad (23a)$$

Die beiden obigen Gleichungen ergeben sich aus den Gleichungen (14) bzw. (14a) durch Differentiation nach  $t$ , wenn man voraussetzt, daß  $c$  nicht von der Zeit abhängt.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial m}{\partial t}(x(\psi), t) \right)_a &= 2 c \left\{ b_0(t) \sin \psi + b_1(t) \frac{1}{4} \sin 2\psi - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} b_m(t) \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-1)\psi}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\psi}{m+1} \right] \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial m}{\partial t}(x, t) \right)_a &= 2 c \left\{ b_0(t) U_1(x/c) + b_1(t) \frac{1}{4} U_2(x/c) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} b_m(t) \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{m-1}(x/c)}{m-1} - \frac{U_{m+1}(x/c)}{m+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} P_0(x/c) &= U_1(x/c) \\ P_1(x/c) &= \frac{1}{4} U_2(x/c) \\ P_m(x/c) &= \frac{1}{2m+2} U_{m+1}(x/c) - \frac{1}{2m-2} U_{m-1}(x/c); \\ &\quad \text{für } m \geq 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Unter Benutzung von Gleichung (21) ergibt sich für den instationären Druck infolge der Beschleunigung  $\ddot{y}(x, t)$ :

$$(p_{12})_a = -\rho c \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) P_m(x/c). \quad (25)$$

Die Indizes 2 und  $a$  sollen angeben, daß dies der Druck infolge der Zeitabhängigkeit der Koeffizienten  $a_m(t)$  beim Potential  $\Phi_2$  ist.

Wir betrachten jetzt den anderen Teil der rechten Seite von Gleichung (22). Er wird gekennzeichnet durch den Index  $c$ , weil dieser Teil durch die Zeitabhängigkeit der halben Breite  $c(t)$  bedingt ist. Durch Zusammenfassung der letzten beiden Terme in Gleichung (22) erhält man:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial m}{\partial t}(x(\psi), t) \right)_c &= 2 \dot{c} \left\{ a_0(t) \frac{1}{\sin \psi} + a_1(t) \frac{\cos^2 \psi}{2 \sin \psi} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} \left[ \frac{m \cdot \sin(m-1)\psi}{m-1} + \frac{m \cdot \sin(m+1)\psi}{m+1} \right] \right\} \\ \left( \frac{\partial m}{\partial t}(x, t) \right)_c &= 2 \dot{c} \left\{ a_0(t) \frac{1}{U_1(x/c)} + a_1(t) \frac{T_1^2(x/c)}{2 U_1(x/c)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} a_m(t) \frac{1}{2} \left[ \frac{m \cdot U_{m-1}(x/c)}{m-1} + \frac{m \cdot U_{m+1}(x/c)}{m+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Es werden hier folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} P_{c,0}(x/c) &= \frac{1}{U_1(x/c)} \\ P_{c,1}(x/c) &= \frac{T_1^2(x/c)}{2 U_1(x/c)} \\ P_{c,m}(x/c) &= \frac{m}{2m-2} U_{m-1}(x/c) - \frac{m}{2m+2} U_{m+1}(x/c); \\ &\quad \text{für } m \geq 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Damit ergibt sich für den zweiten Teil des instationären Drucks:

$$(p_{12})_c = -\rho \dot{c} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) P_{c,m}(x/c). \quad (27)$$

Es gilt damit für den instationären Druck an der Plattenunterseite infolge des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi_2$ :

$$\begin{aligned} p_{12}(x, t) &= \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(x, 0, t) = \\ &= -\rho \dot{c} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) P_{c,m}(x/c) - \rho c \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) P_m(x/c) \\ &\quad \text{für } |x| \leq c. \end{aligned} \quad (28)$$

Für das hier interessierende Problem des symmetrischen Stoßes verschwinden alle ungeraden Koeffizienten  $a_m(t)$  und  $b_m(t)$ .

Es soll noch eine Berechnung der resultierenden Kraft abgeschlossen werden. Es gilt:

$$P_{12} = \int_{-c}^{+c} p_{12}(x) dx.$$

Es kann gezeigt werden, daß:

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{+c} U_n(x/c) dx &= \begin{cases} \pi/2 \cdot c & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases} \\ \int_{-c}^{+c} \frac{1}{U_1(x/c)} dx &= \pi c \\ \int_{-c}^{+c} \frac{T_1^2(x/2)}{2 U_1(x/c)} dx &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist die resultierende Kraft auf die Plattenunterseite:

$$P_{12} = -\pi Q c c (a_0 - \frac{1}{2} a_2) - \frac{\pi Q c^2}{2} (b_0 - \frac{1}{2} b_2). \quad (29)$$

## B. Lösungen für das elastische Teilproblem

### 1. Allgemeine Bemerkungen

Das elastische System, für das die Untersuchungen durchgeführt werden, soll möglichst einfach und übersichtlich sein. Es soll aber auch die wesentlichen Eigenschaften eines Schiffsquerschnittes wiedergeben. Der prinzipielle Aufbau des behandelten Typs von elastischen Körpern ist aus Bild 3 zu sehen:

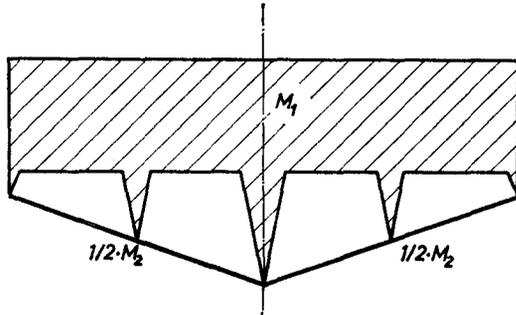


Bild 3

Beim Stoßkörper werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

- Der Stoßkörper bestehe aus einem starren Rumpfteil mit der Masse  $M_1$  und aus einem Boden aus elastischen Platten mit einer gesamten Masse von  $M_2$ . Die Lager der Bodenplatten gehören zum starren Rumpf. Nur die elastischen Bodenplatten kommen mit der Flüssigkeit in Berührung.
- Das elastische System sei genau wie das hydrodynamische zweidimensional und symmetrisch.
- Es sei zunächst keine Einschränkung über die Art der Lagerung der Platten gemacht. — Für die numerischen Beispiele wird später vereinfachend angenommen, daß zwei getrennte Bodenplatten vorhanden sind, die in der Mitte des Modells und an den Seiten frei drehbar gelagert sind.
- Die unbelasteten Bodenplatten seien eben. Die Plattendicke sei konstant.

Um möglichst einfache Gleichungen zur Beschreibung der Bewegungen der Bodenplatten zu bekommen, werden noch weitere Voraussetzungen gemacht:

Da vorausgesetzt wurde, daß die Belastungsänderungen langsam im Verhältnis zur Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit sind, sind die Änderungen der Belastung auch langsam im Vergleich zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Spannungen im Boden. Man kann also stets mit den Gleichgewichtsbedingungen für den gesamten Boden rechnen.

Es wird vorausgesetzt, daß die Verformungen so klein sind, daß der Boden der einfachen linearen Biegegleichung gehorcht. Membranspannungen spielen keine Rolle.

Es wird schließlich angenommen, daß die Schubkräfte vernachlässigbar klein sind. Es wird keine Dämpfung berücksichtigt.

Es gilt also folgende Differentialgleichung:

$$EI y^{(IV)}(x, t) + \mu_B \ddot{y}(x, t) = q(x, t) \quad (31)$$

$q(x, t)$  ist die Belastung des Bodens und enthält damit auch

die hydrodynamischen Kräfte. Man hat sich zu vergegenwärtigen, daß die hydrodynamischen Massenkkräfte für die dünnen Bodenplatten wesentlich größer sind als die Eigenmasse der Platte.

### 2. Lösung der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung (31) gilt für jedes unabhängige Stück der Bodenplatten. Wir wollen für die weitere Behandlung annehmen, daß die Bodenplatte entweder von einer Seite des Modells durchläuft bis zur anderen Seite, oder nur in der Mitte unterteilt ist. In beiden Fällen kann man das System in der Mitte aufteilen. Die Differentialgleichung (31) gilt also stets für den Bereich  $0 \leq x \leq L$ .

Die Lösung der Differentialgleichung ist bei Hohenemser und Prager [16] beschrieben und soll hier nur kurz referiert werden.

Man löst zunächst die homogene Differentialgleichung mit einem Separationsansatz. Es sei gesetzt:

$$y(x, t) = w(t) \cdot Y(x), \text{ wobei } w(t) = C e^{i\omega t}. \quad (32)$$

Es ergibt sich damit:

$$Y^{(IV)}(x) - \frac{\mu_B \omega^2}{EI} Y(x) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist immer in der Form

$$Y(x) = D \cdot e^{\alpha x}$$

möglich. Man erhält mit diesem Lösungsansatz die charakteristische Gleichung:

$$\alpha^4 - \frac{\mu_B \omega^2}{EI} = 0$$

$$\alpha = \pm K i \pm iK; \text{ wobei } K = \sqrt[4]{\frac{\mu_B \omega^2}{EI}}. \quad (33)$$

Die allgemeine Lösung läßt sich somit schreiben:

$$Y(x) = D_1 \sin Kx + D_2 \cos Kx + D_3 \sinh Kx + D_4 \cosh Kx. \quad (34)$$

Aus den Randbedingungen für die Lagerung der Platte lassen sich die vier Konstanten  $D_1, D_2, D_3, D_4$  bis auf einen konstanten Faktor bestimmen. Außerdem errechnet man daraus die Eigenwerte  $K_n$ .

Die Funktionen  $V_n(x)$  bilden ein Orthogonalsystem. Nimmt man an, daß die Funktionen außerdem normiert sind, so gilt:

$$\int_0^L Y_i(x) Y_k(x) \mu_B dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung mit beliebigem Störglied  $q(x, t)$  ist in folgender Weise möglich:

Entsprechend dem Lösungsansatz (32) erhält man die Verformungen  $y(x, t)$  in Form einer Reihe:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot Y_n(x).$$

dabei ist:

$$w_n(t) = \int_0^L y(x, t) Y_n(x) \mu_B dx.$$

In ähnlicher Weise entwickelt man das Störglied nach den Eigenschwingungsformen  $V_n(x)$ :

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) \mu_B$$

$$q_n(t) = \int_0^L q(x, t) Y_n(x) dx. \quad (35)$$

Mit Hilfe dieser Reihen läßt sich die inhomogene Differentialgleichung aufspalten in die Normalgleichungen

$$\ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) = q_n(t); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Die Lösungen dieser Normalgleichungen sind:

$$w_n(t) = w_n(t_0) \cos \omega_n(t - t_0) + \frac{\dot{w}_n(t_0)}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_0) + \frac{1}{\omega_n} \int_{t_0}^t q_n(t') \sin \omega_n(t - t') \cdot dt' \quad (37)$$

Man erhält durch Differentiation:

$$\dot{w}_n(t) = -\omega_n \cdot w_n(t_0) \sin \omega_n(t - t_0) + \dot{w}_n(t_0) \cos \omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t q_n(t') \cos \omega_n(t - t') \cdot dt' \quad (38)$$

### C. Kombination der hydrodynamischen und elastischen Teillösungen

#### 1. Allgemeine Bemerkungen

Es gelingt nicht, eine einzige Gleichung zur Berechnung des hydroelastischen Stoßes aufzustellen. Es wurde zwar angedeutet, daß eine geschlossene Lösung der Integralgleichung (9) für die Wirbelbelegung  $\gamma$  existiert. Damit ließen sich explizite Ausdrücke für den Druck und für die Geschwindigkeiten an der freien Oberfläche aufstellen. Es gelingt jedoch nicht, die Integralgleichung (6) geschlossen zu lösen.

Es läßt sich leicht einsehen, daß das Problem in jedem Falle nichtlinear ist, und zwar durch den ersten Term in Gleichung (7) und in Gleichung (28). Das Problem läßt sich nicht linearisieren, weil die Nichtlinearität das hervorstechende Merkmal des hydrodynamischen Stoßes ist. Sie wird nämlich verursacht durch die Zunahme der eingetauchten Breite.

Es ist unwahrscheinlich, daß die Darstellung des Problems in einer einzigen Gleichung die Auflösung erleichtern würde. Vielmehr verspricht die Benutzung und Kombination der angegebenen Teillösungen für die hydrodynamische und die elastische Seite des Problems eine recht übersichtliche numerische Behandlung.

#### 2. Aufstellung der Grundgleichungen

Es wird jetzt gezeigt, daß die Integrale, die zur Berechnung der Koeffizienten in den Reihen für den Druck und für die Verformung erforderlich sind, auf bekannte Funktionen zurückzuführen sind.

Der Druck an der Bodenplatte liegt immer in der Form vor:

$$p_i(x, t) = \frac{\rho c \dot{\eta}^2}{U} \frac{1}{U_1(x/c)} + \rho \dot{\eta} c U_1(x/c) - \frac{\rho \dot{\eta}}{U} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} P_{c, 2m}(x/c) - \rho c \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} P_{2m}(x/c) \quad \text{für } |x| \leq c$$

$$p_i(x, t) = 0 \quad \text{für } |x| > c. \quad (39)$$

Diese Gleichung ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (7) und (28) in Gleichung (2) unter Benutzung von Gleichung (5). Die Koeffizienten der Erregung  $q_n(t)$  ergeben sich aus Gleichung (35). Dabei ist:

$$q(x, t) = p_i(x, t) + \mu_B \ddot{\eta}(t) + k(x, t)$$

und die Eigenformen  $Y_n(x)$  sind immer von dem Typ in Gleichung (34). Es gilt:

$$q_n(t) = \int_0^c p_i(x, t) Y_n(x) dx + \int_0^L \mu_B \ddot{\eta}(t) Y_n(x) dx + \int_0^L k(x, t) Y_n(x) dx \quad (40)$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral. Dazu wird eingeführt:

$$\Theta_{2m}(K_n c) = (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^1 Y_n\left(c \cdot \frac{x}{c}\right) T_{2m}\left(\frac{x}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - (x/c)^2}} dx$$

$$= (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Y_n(x(\psi)) \cdot \cos 2m \psi d\psi \quad (41)$$

Es läßt sich zeigen, daß:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(A \cos \psi) \cdot \cos 2m \psi \cdot d\psi = (-1)^m \cdot \pi/2 \cdot \Omega_{2m}(A)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(A \cos \psi) \cdot \cos 2m \psi \cdot d\psi = (-1)^m \cdot \pi/2 \cdot J_{2m}(A)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sinh(A \cos \psi) \cdot \cos 2m \psi \cdot d\psi = -(-1)^m \cdot \pi/2 \cdot i \Omega_{2m}(iA)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cosh(A \cos \psi) \cdot \cos 2m \psi \cdot d\psi = \pi/2 \cdot I_{2m}(A)$$

Man kann für  $\Theta_{2m}$  schreiben:

$$\Theta_{2m}(K_n c) = D_{1, n} \Omega_{2m}(K_n c) + D_{2, n} J_{2m}(K_n c) - D_{3, n} i \Omega_{2m}(i K_n c) + (-1)^m D_{4, n} I_{2m}(K_n c)$$

Damit gilt für das erste Integral in Gleichung (40):

$$\int_0^L p_i Y_n(x) dx = \frac{\rho c \dot{\eta}^2}{U} \frac{\pi}{2} \Theta_0 + \rho c^2 \dot{\eta} \cdot \frac{\pi}{4} [\Theta_0 + \Theta_2] - \frac{\rho c \dot{\eta}}{U} \left\{ a_0 \frac{\pi}{2} \Theta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} (-1)^m \frac{\pi}{4} \left( \frac{2m}{4m-2} [\Theta_{2m-2} + \Theta_{2m}] - \frac{2m}{4m+2} [\Theta_{2m} + \Theta_{2m+2}] \right) \right\} - \rho c^2 \left\{ b_0 \frac{\pi}{4} [\Theta_0 + \Theta_2] + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} (-1)^m \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{4m-2} [\Theta_{2m-2} + \Theta_{2m}] + \frac{1}{4m+2} [\Theta_{2m} + \Theta_{2m+2}] \right) \right\} \quad (42)$$

Für den zweiten Term in Gleichung (40) soll eingeführt werden:

$$V_n = \int_0^L Y_n(x) dx = D_{1, n} \int_0^L \sin(k_n x) dx + D_{2, n} \int_0^L \cos(k_n x) dx + D_{3, n} \int_0^L \sinh(k_n x) dx + D_{4, n} \int_0^L \cosh(k_n x) dx$$

Damit ist:

$$\int_0^L \mu_B \ddot{\eta} Y_n dx = \mu_B \ddot{\eta} V_n \quad (44)$$

Für den dritten Term in Gleichung (40) soll festgesetzt werden:

$$k_n(t) = \int_0^L k(x, t) Y_n(x) dx \quad (45)$$

Handelt es sich bei  $k$  z. B. um die Belastung durch die Schwerkraft, so ist  $k = -\mu_B g$ , und damit  $k_n = -\mu_B g V_n$ .

Man hat die Gleichungen (42), (44) und (45) in Gleichung (40) einzusetzen, und erhält dann den Ausdruck für die Koeffizienten der Erregung  $q_n(t)$ . Die Gleichung soll jedoch nicht noch einmal hingeschrieben werden, weil sie später noch weiter umgeformt wird.

Wir betrachten jetzt die Koeffizienten für die Entwicklung der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bodenplatte nach Tschebyscheff—Polynomen: Der Reihenansatz für die Schwingungsgleichung liefert die Geschwindigkeit  $\dot{y}(x, t)$  und die Beschleunigung  $\ddot{y}(x, t)$  immer in der Form:

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) Y_n(x) dx$$

$$\ddot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) Y_n(x) dx.$$

Die Koeffizienten  $a_{2m}(t)$  erhält man auf folgende Weise:

$$a_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \frac{2}{\pi c} \int_0^c Y_n(x) \frac{T_0(x/c)}{\sqrt{1-(x/c)^2}} dx \quad (46)$$

$$a_{2m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \frac{4}{\pi c} \int_0^c Y_n(x) \cdot \frac{T_{2m}(x/c)}{\sqrt{1-(x/c)^2}} dx$$

für:  $m = 1, 2, 3 \dots$

Für die Koeffizienten  $b_{2m}(t)$  gelten analoge Gleichungen.

Man kommt wieder auf die gleichen Integrale wie bei der Berechnung der  $q_n(t)$  und kann schreiben:

$$a_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \cdot \Theta_0(K_n c) \quad (47)$$

$$a_{2m}(t) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \cdot 2 \Theta_{2m}(K_n c).$$

Es gelten entsprechende Gleichungen für  $b_{2m}(t)$ .

Es ist nicht zweckmäßig, in der Rechnung die Koeffizienten  $a$  und  $b$  zu benutzen, sondern es ist besser, folgende Festsetzung zu treffen:

$$a'_{2m} = (-1)^m \cdot a_{2m}; \quad b'_{2m} = (-1)^m \cdot b_{2m}. \quad (48)$$

Damit gilt dann:

$$a'_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \Theta_0(K_n c); \quad (49)$$

$$a'_{2m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \cdot 2 \Theta_{2m}(K_n c); \quad m \neq 0$$

$$b'_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) \Theta_0(K_n c); \quad (50)$$

$$b'_{2m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) \cdot 2 \Theta_{2m}(K_n c); \quad m \neq 0.$$

Es läßt sich mit den Koeffizienten  $a'$  und  $b'$  auch die Gleichung für  $q_n(t)$  vereinfachen:

$$q_n(t) = \frac{\rho c \dot{\eta}^2}{U} \cdot \frac{\pi}{2} \Theta_0(K_n c) + \rho c^2 \ddot{\eta} \cdot \frac{\pi}{4} [\Theta_0(K_n c) + \Theta_2(K_n c)] - \frac{\rho c \dot{\eta}}{U} \left\{ a'_0(t) \cdot \frac{\pi}{2} \Theta_0(K_n c) + \right. \quad (51)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} a'_{2m}(t) \frac{\pi}{4} \left( \frac{2m}{4m-2} [\Theta_{2m-2}(K_n c) + \Theta_{2m}(K_n c)] - \frac{2m}{4m+2} [\Theta_{2m}(K_n c) + \Theta_{2m+2}(K_n c)] \right) \left. \right\} -$$

$$- \rho c^2 \left\{ b'_0(t) \frac{\pi}{4} [\Theta_0(K_n c) + \Theta_2(K_n c)] + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b'_{2m}(t) \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{4m-2} [\Theta_{2m-2}(K_n c) + \Theta_{2m}(K_n c)] + \frac{1}{4m+2} [\Theta_{2m}(K_n c) + \Theta_{2m+2}(K_n c)] \right) \left. \right\} + \mu_B \ddot{\eta} V_n + k_n(t).$$

Es wird jetzt die Gleichung für die Beschleunigung des starren Rumpfes  $\ddot{\eta}(t)$  aufgestellt: Für die resultierende hydrodynamische Kraft auf den Boden gilt unter Benutzung von Gleichung (29):

$$\int_{-c}^{+c} p_1(x, t) dx = \frac{\pi \rho c \dot{\eta}^2}{U} + \frac{\pi \rho c^2}{2} \ddot{\eta} - \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{U} \left( a'_0 + \frac{a'_2}{2} \right) - \frac{\pi \rho c^2}{2} \left( b'_0 + \frac{b'_2}{2} \right). \quad (52)$$

Aus der Gleichung (3) für die Beschleunigung des Schwerpunkts läßt sich für die Beschleunigung des starren Rumpfes ableiten:

$$(M_1 + M_2) \ddot{\eta}(t) = - \int_{-c}^{+c} p_1(x, t) dx + \int_{-L}^{+L} \ddot{y}(x, t) \mu_B dx - \int_{-L}^{+L} k(x, t) dx + K(t).$$

Unter Verwendung der Gleichungen (43) und (52) und nach Auflösung der Gleichung nach  $\ddot{\eta}(t)$  ergibt sich:

$$\ddot{\eta}(t) = \frac{1}{M_1 + M_2 + \frac{\pi \rho c^2}{2}} \left\{ - \frac{\pi \rho c \dot{\eta}^2}{U} + \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{U} \left( a'_0 + \frac{a'_2}{2} \right) + \frac{\pi \rho c^2}{2} \left( b'_0 + \frac{b'_2}{2} \right) + 2 \mu_B \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) V_n + \sum K(t) \right\} \quad (53)$$

dabei ist  $\sum K(t) = K(t) - \int_{-L}^{+L} k(x, t) \cdot dx$ , also die Summe der zusätzlichen äußeren Kräfte, die auf das System wirken.

Die Gleichungen (36), (50), (51) und (53) sind folgendermaßen zu deuten: Diese vier Gleichungen enthalten die gegenseitige Beeinflussung des hydrodynamischen und des elastischen Systems für einen Zeitpunkt  $t$ . Unter der Voraussetzung, daß die Größen  $w_n(t)$ ,  $\dot{w}_n(t)$  für alle  $n$  (womit nach Gleichung (49) auch die Koeffizienten  $a_{2m}(t)$  bekannt sind) sowie  $\dot{\eta}(t)$ ,  $U(t)$  und  $e(t)$  und außerdem  $K(t)$  und  $k(x, t)$  bekannt sind, sind die vier Gleichungen (36), (50), (51) und (53) ausreichend, um die Koeffizienten  $q_n(t)$ ,  $\ddot{w}_n(t)$  und  $b_{2m}(t)$  sowie die Beschleunigung  $\ddot{\eta}(t)$  zu berechnen. Dabei hängen die Größen  $w_n(t)$ ,  $\dot{w}_n(t)$ ,  $\dot{\eta}(t)$ ,  $U(t)$  und  $c(t)$  nur von der Vorgeschichte, jedoch nicht von den Größen zur Zeit  $t$  selbst ab.

Für die Berechnung der  $w_n(t)$  und  $\dot{w}_n(t)$  gelten die Gleichungen (37) und (38).

Man erhält  $\dot{\eta}(t)$  durch Integration von  $\ddot{\eta}(t)$ :

$$\dot{\eta}(t) = \dot{\eta}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{\eta}(t') dt'. \quad (54)$$

Für  $U(t)$  ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (8) und (20a) in Gleichung (6):

$$y_{bo}(x) + y(x, t(x)) = \int_0^x \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (c/x)^2}} - \frac{a_0(t(c))}{\dot{\eta}(t(c))} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (c/x)^2}} - 1 \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}(t(c))}{\dot{\eta}(t(c))} \left[ \frac{c/x}{1 + \sqrt{1 - (c/x)^2}} \right]^{2m} \right\} U(t(c)) dc \quad (55)$$

Durch Integration ergibt sich aus Gleichung (5) für  $c(t)$ :

$$c(t) = \int_{t_0}^t \frac{\dot{\eta}(t')}{U(t')} dt' \quad (56)$$

Die Berechnung der Integrale in den Gleichungen (37), (38), (54) und (56), sowie die Auflösung der Integralgleichung (55) ist nur numerisch möglich. Die dafür benutzten Näherungssätze werden im nächsten Kapitel behandelt.

Es müssen selbstverständlich  $K(t)$  und  $k(x, t)$  vorliegen. Im allgemeinen setzt man  $K(t) = 0$  und  $k(x, t) = 0$ . Man vernachlässigt also gegenüber den hydrodynamischen Stoßkräften sämtliche übrigen äußeren Kräfte. Für den Fall, daß die Schwerkraft berücksichtigt werden soll, ist

$$K(t) = M_1 \cdot g, \quad k(x, t) = -\mu_B \cdot g, \\ K(t) = (M_1 + M_2) \cdot g, \quad k_n(t) = -\mu_B \cdot g \cdot V_n.$$

### 3. Vereinfachungen für das spezielle Modell

Für die numerischen Rechnungen wird der Stoßkörper vereinfacht: Es soll der elastische Boden aus zwei getrennten Bodenplatten bestehen, die in der Mitte des Modells und an den Seiten frei drehbar am Rumpf gelagert sind. Den prinzipiellen Aufbau des berechneten Modells zeigt Bild 4:

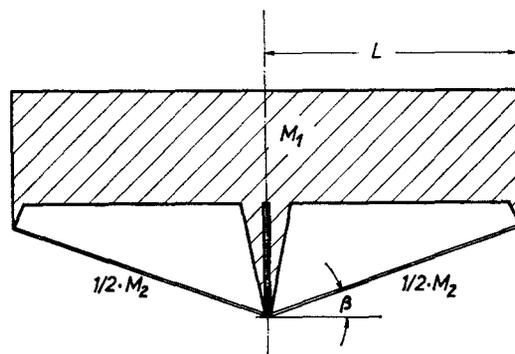


Bild 4

Für dieses Modell sind die Eigenschwingungsformen besonders einfach:

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi|x|}{L}\right) \quad (57)$$

$$\omega_n = 2\pi f_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu_B}} \quad (58)$$

Damit ist:

$$\Theta_{2m}(K_n c) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \Omega_{2m}\left(n\pi \frac{c}{L}\right) \quad (59)$$

$$V_n = \begin{cases} \frac{2L}{n\pi} \cdot \sqrt{2/\mu_B L} & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (60)$$

Für den geraden Keil mit dem Kielungswinkel  $\beta$  ist außerdem:

$$y_{bo}(x) = \beta|x| \quad (61)$$

$$U(t_0) = \frac{2\beta}{\pi} \quad (62)$$

Diese Werte sind in die betreffenden Gleichungen einzusetzen.

(Fortsetzung folgt)

## Nomenklatur

<b>1. Bedeutung der Symbole</b>	
a (Index): Anteil der Strömungsänderung durch Zeitabhängigkeit der $a_m(t)$	
$a_m(t)$ Koeffizienten der Fourierentwicklung von $\dot{v}(x, t)$ , $a'_{2m} = (-1)^m a_{2m}$	
$A_{2m}(t) = a_{2m}(t) / \dot{\eta}(t)$ , $A_{r, 2m} = 1/2 \cdot [A_{2m}(t_{r-1}) + A_{2m}(t_r)]$	
$b_m(t)$ Koeffizienten der Fourierentwicklung von $\ddot{v}(x, t)$ , $b'_{2m} = (-1)^m b_{2m}$	
c (Index): Anteil der Strömungsänderung durch Zeitabhängigkeit von $c(t)$	
$c(t)$ halbe eingetauchte Breite, $c_r = c(t_r)$ , $\dot{c} = dc/dt$	
$D, D_1, D_2, D_3, D_4$ Koeffizienten der Eigenschwingungsformen	
$EI$ Steifigkeit der Bodenplatte	
$f_n$ Eigenfrequenz des n-ten Schwingungsgrades im Vakuum	
$f^*$ ( $= f^*_1$ ) bezogene Grundfrequenz des Bodens, Cauchy-Kennzahl	
$g$ Erdbeschleunigung	
$g^*$ bezogene Erdbeschleunigung, Froude-Kennzahl	
$g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$ spezielle Kombinationen von Winkelfunktionen	
$H$ Zahl der direkt berechneten Ordinaten der freien Oberfläche	
$I_m(x)$ modifizierte Besselfunktion	
$J_m(x)$ Besselfunktion erster Art	
$k(x, t)$ zusätzliche Kraft auf den Boden (außer der instat. hydrodyn. Kraft)	
$k_n(t)$ Koeffizienten für die Entwicklung von $k(x, t)$	

$K(t)$ zusätzliche Kraft auf den Rumpf, $\sum K(t) = K(t) - \int_{-L}^{+L} k(x, t) dx$
$K_n$ Eigenwerte der Schwingungsgleichung
$l$ Knotenabstand der Schwingung
$L$ halbe größte Breite des Modells
$m$ Numerierung der Fourierglieder
$m(x, t)$ Dipolbelegung auf der Platte
$m''(x, t)$ örtliche hydrodynamische Masse je Flächeneinheit
$M$ Zahl der benutzten Fourierglieder
$M_1$ Masse je Längeneinheit des starren Rumpfes
$M_2$ Masse je Längeneinheit des elastischen Teils
$M^*$ bezogene Gesamtmasse des Modells, Newton-Kennzahl
$M^*_2$ bezogene Masse des elastischen Teils, Newton-Kennzahl
$n$ Numerierung der Reihenglieder für die Bodenschwingung
$N$ Zahl der benutzten Reihenglieder
$p_1(x, t)$ instationärer Anteil des Drucks (an der Unterseite der Platte)
$P_{i, 2}, (P_{i, 2})_a, (P_{i, 2})_c$ Anteile des instat. Drucks durch den elast. Anteil der Strömung $\Phi_2$ , Anteile infolge $a(t)$ u. $c(t)$
$P_m(x)$ Druckfunktionen für $(P_{i, 2})_a$ , $P'_{2m} = (-1)^m P_{2m}$
$P_{c, m}(x)$ Druckfunktionen f. $(P_{i, 2})_c$ , $P'_{c, 2m} = (-1)^m P_{c, 2m}$
$q(x, t)$ Belastung des elastischen Systems
$q_n(t)$ Koeffizienten der Entwicklung von $q(x, t)$

**r** Numerierung der Zeitabschnitte  
**R** Zahl der Zeitabschnitte, in die der Vorgang unterteilt wird  
**s** Dicke der Bodenplatte  
**t** Zeit,  $t'$  = Integrationsvariable  
**t<sub>r</sub>** Zeit am Ende des r-ten Zeitabschnitts,  $t_0$  = Zeit des Stoßbeginns  
**T<sub>m</sub>(x)** Tschebyscheff-Polynome erster Art  
**u(t<sub>r</sub>)** Hilfsgröße für die Extrapolation der freien Oberfläche  
**U(t)** =  $\dot{\eta}(t) / \dot{c}(t)$  : Hilfsgröße,  $U_r = 1/2 \cdot [U(t_{r-1}) + U(t_r)]$   
**U<sub>m</sub>(x)** Tschebyscheff-Polynome zweiter Art  
**V<sub>0</sub>** =  $\dot{\eta}(t_0)$  : Auftreffgeschwindigkeit  
 $V_n = \int_0^L Y_n(x) dx$   
**w<sub>n</sub>(t)** Koeffizienten der Reihenentwicklung von  $y(x, t)$  nach  $Y_n(x)$ ;  $\dot{w}_n(t), \ddot{w}_n(t)$  : Koeffizienten für  $\dot{y}(x, t)$  und  $\ddot{y}(x, t)$   
**W** Widerstandsmoment der Bodenplatte  
**x** Koordinate in horizontaler Richtung, gemessen von der Mitte des Modells,  $x'$  : Integrationsvariable  
**y(x, t)** Verformung der Bodenplatte gegenüber Bezugspunkt S (Auflager), Vorzeichen positiv nach innen in den Körper  
 $\dot{y}(x, t); \ddot{y}(x, t)$  : Geschwindigkeit und Beschleunigung  
**y<sub>f</sub>(x, t)** Ordinaten der freien Oberfläche  
**y<sub>b</sub>(x, t)** Ordinaten der Körperoberfläche,  $y_{b0}(x)$  : Ordinaten der unverformten Modelloberfläche  
**Y<sub>n</sub>(x)** n-te Eigenschwingungsform des Bodens im Vakuum,  $Y'(x) = dY/dx$   
**z** vertikale Koordinate im Ersatzsystem, Vorzeichen positiv nach oben  
**Z<sub>2m</sub>(x<sub>r</sub>, t<sub>ρ</sub>)** Hilfsintegrale zur Berechnung der freien Oberfläche  
 $\beta = dy_{b0}/dx$  : Kielungswinkel des unverformten Körpers  
 $\gamma(x, t)$  Wirbelbelegung auf der Platte  
**δ(x<sub>r</sub>, t<sub>ρ</sub>)** Hilfsgröße zur Berechnung der freien Oberfläche  
 $\Delta c_r$  Änderung der halben eingetauchten Breite im Zeitabschnitt r  
 $\Delta t_r$  Dauer des Zeitabschnitts r  
**η(t)** Lage des starren Rumpfes (Bezugspunkt S), Vorzeichen positiv nach unten in die Flüssigkeit hinein,  $\eta(t_0) = 0, \dot{\eta} = d\eta/dt, \ddot{\eta} = d^2\eta/dt^2$   
 $\dot{\eta}_r = 1/2 \cdot [\dot{\eta}(t_{r-1}) + \dot{\eta}(t_r)]$   
 $\Theta_{2m} = (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^1 Y_n(x) \cdot T_{2m}(x/c) \cdot [1 - (x/c)^2]^{-1/2} dx$  : Koeffizienten der Entwicklung der Eigenschwingungsformen nach Tschebyscheff-Polynomen  
 $\mu_B$  Massenbelegung der Bodenplatte  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit  
 $\sigma_b$  Biegespannungen in der Bodenplatte (positiv: Oberseite Zug)  
 $\varphi = \arccos(x'/c)$   
 $\Phi$  Geschwindigkeitspotential  
 $\Phi_1, \Phi_2$  Anteile des Geschwindigkeitspotentials für den Starranteil bzw. den elastischen Anteil der Strömung  
 $\psi = \arccos(x'/c)$ , bzw. =  $\text{arccosh}(x'/c)$   
 $\omega_n$  Kreiseigenfrequenz des n-ten Schwingungsgrades  
 $\Omega_m(x)$  Lommel-Weber-Funktion

## 2. Definition der dimensionslosen Größen

$x = L \cdot x^*$  ;  $c(t) = L \cdot c^*(t^*)$   
 $\delta(x_r, t_\rho) = L \cdot \delta^*(x_r^*, t_\rho^*)$  ;  $Z_{2m}(x_r, t_\rho) = L \cdot Z_{2m}^*(x_r^*, t_\rho^*)$   
 $y(x, t) = 2\beta L/\pi \cdot y^*(x^*, t^*)$  ;  $\eta(t) = 2\beta L/\pi \cdot \eta^*(t^*)$   
 $t = 2\beta L/\pi V_0 \cdot t^*$   
 $M_1 + M_2 = \pi \rho L^2/2 \cdot M^*$  ;  $M_2 = \pi \rho L^2/2 \cdot M^{*2}$   
 $\dot{c}(t) = \pi V_0/2\beta \cdot \dot{c}^*(t^*)$

$\dot{\eta}(t) = V_0 \cdot \dot{\eta}^*(t^*)$  ;  $\dot{y}(x, t) = V_0 \cdot \dot{y}^*(x^*, t^*)$   
 $a'_{2m}(t) = V_0 \cdot a'_{2m}(t^*)$   
 $\ddot{\eta}(t) = \pi V_0^2/2\beta L \cdot \ddot{\eta}^*(t^*)$  ;  $\ddot{y}(x, t) = \pi V_0^2/2\beta L \cdot \ddot{y}^*(x^*, t^*)$   
 $g = \pi V_0^2/2\beta L \cdot g^*$  ;  $b'_{2m}(t) = \pi V_0^2/2\beta L \cdot b'^*_{2m}(t^*)$   
 $P(t) = (M_1 + M_2) \pi V_0^2/2\beta L \cdot P^*(t^*)$  ;  
 $K(t) = (M_1 + M_2) \pi V_0^2/2\beta L \cdot K^*(t^*)$   
 $\omega_n = \pi V_0/2\beta L \cdot \omega_n^*$  ;  $f_n = \pi V_0/2\beta L \cdot f_n^*$   
 $p(x, t) = \pi \rho V_0^2/2\beta \cdot p^*(x^*, t^*)$  ;  $k(x, t) = \pi \rho V_0^2/2\beta \cdot k^*(x^*, t^*)$   
 $\sigma_b(x, t) = \pi \rho V_0^2/2\beta \cdot (L/s)^2 \cdot \sigma_b^*(x^*, t^*)$   
 $U = 2\beta/\pi \cdot U^*$   
 $q_n(t) = 1/2/\mu_B \cdot L \cdot \pi \rho L V_0^2/2\beta \cdot q_n^*(t^*)$   
 $k_n(t) = 1/2/\mu_B \cdot L \cdot \pi \rho L V_0^2/2\beta \cdot k_n^*(t^*)$   
 $\dot{w}_n(t) = 1/2/\mu_B \cdot L \cdot \pi \rho L V_0^2/2\beta \cdot \dot{w}_n^*(t^*)$   
 $\ddot{w}_n(t) = 1/2/\mu_B \cdot L \cdot \pi \rho L V_0^2/2\beta \cdot 1/\omega_n \cdot \ddot{w}_n^*(t^*)$   
 $w_n(t) = 1/2/\mu_B \cdot L \cdot \pi \rho L V_0^2/2\beta \cdot 1/\omega_n^2 \cdot w_n^*(t^*)$

## 3. Definition der Matrizen

### a) Vektoren

$a^T(t) = (a'_0(t), a'_2(t), \dots, a'_{2M-2}(t))$   
 $\bar{A}_r^T = (A_{r,0}, A_{r,2}, \dots, A_{r,2M-2})$   
 $b^T(t) = (b'_0(t), b'_2(t), \dots, b'_{2M-2}(t))$   
 $c^T = (U_1(x_1/c), U_1(x_2/c), \dots, U_1(x_S/c))$ ,  $0 \leq x_s/c \leq 1$   
 $b^T = (1/U_1(x_1/c), 1/U_1(x_2/c), \dots, 1/U_1(x_S/c))$ ,  $0 \leq x_s/c \leq 1$   
 $e^T = (1, 1, 1, 1, \dots)$ , H Elemente  
 $f^T(t_r) = (y_f(x_{r+1}, t_r), y_f(x_{r+2}, t_r), \dots, y_f(x_{r+H}, t_r))$   
 $f_0^T(t_r) = (y_f(x_{r+2}, t_r), y_f(x_{r+3}, t_r), \dots, y_f(x_{r+H+1}, t_r))$   
 $g^T = (1, 1/2, 0, 0, \dots)$ , M Elemente  
 $h^T = (1, 0, 0, 0, \dots)$ , M Elemente  
 $f^T(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_N(t))$   
 $m^T(z) = (\Omega_0(z) + \Omega_2(z), \Omega_0(2z) + \Omega_2(2z), \dots, \Omega_0(Nz) + \Omega_2(Nz))$   
 $n^T = (1, 0, 1/2, 0, 1/2, \dots)$ , N Elemente  
 $p^T(t) = (p(x_1, t), p(x_2, t), \dots, p(x_S, t))$ ,  $0 \leq x_s/c(t) \leq 1$   
 $\bar{p}^T(x/c) = (P'_0(x/c), P'_2(x/c), \dots, P'_{2M-2}(x/c))$ ,  $x \leq c$   
 $\bar{p}'_c^T(x/c) = (P'_{c,0}(x/c), P'_{c,2}(x/c), \dots, P'_{c,2M-2}(x/c))$ ,  $x \leq c$   
 $q^T(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))$   
 $r^T(z) = (2\Omega_0(z), 2\Omega_0(2z), \dots, 2\Omega_0(Nz))$   
 $w^T(t) = (\omega_1^2 w_1(t), \omega_2^2 w_2(t), \dots, \omega_N^2 w_N(t))$   
 $\dot{w}^T(t) = (\omega_1 \dot{w}_1(t), \omega_2 \dot{w}_2(t), \dots, \omega_N \dot{w}_N(t))$   
 $\ddot{w}^T(t) = (\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t), \dots, \dot{w}_N(t))$   
 $\eta^T(t) = (y(x_1, t), y(x_2, t), \dots, y(x_T, t))$ ,  $0 \leq x_t \leq L$   
 $\dot{\eta}^T(t) = (\dot{y}(x_1, t), \dot{y}(x_2, t), \dots, \dot{y}(x_T, t))$ ,  $0 \leq x_t \leq L$   
 $\ddot{\eta}^T(t) = (\ddot{y}(x_1, t), \ddot{y}(x_2, t), \dots, \ddot{y}(x_T, t))$ ,  $0 \leq x_t \leq L$   
 $\bar{Y}^T(x) = \sqrt{\mu_B L/2} \cdot (Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_N(x))$   
 $\delta^T(x_r, t_\rho) = (Z_0(x_r, t_\rho), Z_2(x_r, t_\rho), \dots, Z_{2M-2}(x_r, t_\rho))$   
 $\bar{Z}_0^T(x_r, t_\rho) = (Z_0(x_r, t_\rho), Z_0(x_{r+1}, t_\rho), \dots, Z_0(x_{r+H-1}, t_\rho))$   
 $\bar{\sigma}_b^T(t) = (\sigma_b(x_1, t), \sigma_b(x_2, t), \dots, \sigma_b(x_T, t))$ ,  $0 \leq x_t \leq L$   
 $\Omega^T(z) = (\Omega_0(z), \Omega_2(z), \dots, \Omega_{2M}(z))$

### b) Diagonalmatrizen

Es wird in vereinfachter Schreibweise nach dem Namen der Diagonalmatrix die allgemeine Form der Diagonalelemente und die Zahl der Reihen angegeben.

$\bar{w}$  :  $\omega_n$  : N  
 $\mathfrak{C}(\Delta t)$  :  $\cos(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{S}(\Delta t)$  :  $\sin(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{G}_1(\Delta t)$  :  $\mathfrak{G}_1(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{G}_2(\Delta t)$  :  $\mathfrak{G}_2(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{G}_3(\Delta t)$  :  $\mathfrak{G}_3(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{G}_4(\Delta t)$  :  $\mathfrak{G}_4(\omega_n \Delta t)$  : N  
 $\mathfrak{E}$  : 1 : N  
 $\mathfrak{F}$  :  $(-1)^m$  : M

c) Matrizen

$$\mathfrak{R}(z) = (\bar{\Omega}(z), \bar{\Omega}(2z), \dots, \bar{\Omega}(Nz))$$

$$\mathfrak{P} = (\bar{p}^T(x_1/c), \bar{p}^T(x_2/c), \dots, \bar{p}^T(x_S/c))^T, 0 \leq x_S/c(t) \leq 1$$

$$\mathfrak{P}_c = (\bar{p}_c^T(x_1/c), \bar{p}_c^T(x_2/c), \dots, \bar{p}_c^T(x_S/c))^T, 0 \leq x_S/c(t) \leq 1$$

$$\mathfrak{Y} = (\bar{Y}^T(x_1), \bar{Y}^T(x_2), \dots, \bar{Y}^T(x_T))^T, 0 \leq x_t \leq L$$

$$\mathfrak{Z}(x_r, t_\rho) = (\delta^T(x_{r+1}, t_\rho), \delta^T(x_{r+2}, t_\rho), \dots, \delta^T(x_{r+H}, t_\rho))^T$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & (1/2 + 1/4) & 1/4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & (1/4 + 1/16) & 1/16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4M-2} \left( \frac{1}{4M-2} + \frac{1}{4M+2} \right) & \frac{1}{4M+2} & \frac{1}{4M+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{Z}_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & (1/2 - 1/4) & -1/4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & (1/4 - 1/16) & -1/16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2M}{4M-2} \left( \frac{2M}{4M-2} - \frac{2M}{4M+2} \right) & -\frac{2M}{4M+2} & -\frac{2M}{4M+2} \end{bmatrix}$$

Damit gilt:

$$\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R} \mathfrak{R}(z)$$

$$\Omega(z) = \mathfrak{R}^T(z) \mathfrak{Z}^T$$

$$\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}^T(z) \mathfrak{Z}_c^T$$

$$m(z) = \mathfrak{Y}^T \Omega^T(z)$$

$$r(z) = \mathfrak{Y}^T \mathfrak{R}^T(z)$$

$$\bar{z}_0(x_r, t_\rho) = \mathfrak{Z}(x_r, t_\rho) \cdot \mathfrak{h}$$

Schrifttum

[1] Th. v. K arman und F. L. W attendorf: The Impact on Seaplane Floats during Landing. NACA TN 321, 1929.  
 [2] H. W agner: Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik 12, 1932, S. 193—215.

[3] W. P abst: Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen. Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 21, 1930, S. 217—226.  
 [4] W. P abst: Über den Landestoß von Seeflugzeugen Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 22, 1931, S. 13—18.  
 [5] J. S ydow: Über den Einfluß von Federung und Kielung auf den Landestoß. DVL-Jahrbuch 1938, S. 329—338.  
 [6] F. W einig: Berücksichtigung der Elastizität beim Aufschlag eines gekielten Flugzeugschwimmers aufs Wasser (Ebenes Problem). Luftfahrt-Forschung 13, 1936, S. 155—159.  
 [7] R. S kalak und D. F eit: Impact on the Surface of a Compressible Fluid. Columbia University, New York, Dept. of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Jan. 1963.  
 [8] J. D. P ierson: The Penetration of a Fluid Surface by a Wedge. Institute of the Aeronautical Sciences, New York, S. M. F. Fund Paper No. FF-3, 1950.  
 [9] R. L. B isplinghoff und C. S. Doherty: Some Studies of the Impact of Vee-Wedges on a Water Surface. J. Fr. Inst. 253, 1952, S. 547—561.  
 [10] R. G. M onaghan: A Theoretical Examination of the Effect of Deadrise on Wetted Area and Associated Mass in Seaplane-Water Impact. Aeronautical Research Council, London, Reports and Memoranda No. 2681, 1952.  
 [11] A. G. F abula: Ellipse Fitting Approximation of Two-Dimensional Normal Symmetric Impact of Rigid Bodies on Water. Proc. of the 5th Mid-Western Conf. on Fluid Mechanics, 1957, S. 299—315.  
 [12] W. S chmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, I. Lineare Integralgleichungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.  
 [13] H. G lauert: The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge University Press, 1948.  
 [14] W. E. C ummins: The Force and Moment on a Body in a Time-Varying Flow. Journal of Ship Research, April 1957, S. 7.  
 [15] O. G rim: Über den Einfluß der mitschwingenden Wassermasse auf die Schwingungseigenschaften lokaler schwingungsfähiger Systeme. Schiff und Hafen, 1953, S. 538.  
 [16] Hohenemser und Prager: Dynamik der Stabwerke. Verlag Julius Springer, Berlin, 1953.  
 [17] Jahnke-Emde-Lösch: Tafeln höherer Funktionen. 6. Auflage, 1960. Verlag B. G. Teubner, Stuttgart.

# Die Berechnung hydroelastischer Stöße

Dipl.-Ing. W. Kay Meyerhoff, Hamburg

(Fortgesetzt aus Schiffstechnik 12. Band, 60. Heft, Seite 18-30)

## III. Numerische Auflösung der Gleichungen

### A. Beschreibung der numerischen Verfahren

#### 1. Allgemeine Bemerkungen

Zur numerischen Auflösung der Gleichungen ist es zweckmäßig, auf die besonderen Eigenschaften der vorkommenden Funktionen Rücksicht zu nehmen, und speziell für sie geeignete Näherungsansätze zu machen. Bei der numerischen Lösung kam erschwerend hinzu, daß die Speicherkapazität der elektronischen Rechenanlage IBM 650, die für die Rechnungen zur Verfügung stand, für das vorliegende Problem etwas knapp ist.

Der Stoßvorgang wird in  $R$  Zeitabschnitte unterteilt von der Dauer  $\Delta t_r$ , so daß für den Zeitabschnitt gilt

$$t_{r-1} \leq t \leq t_r = t_{r-1} + \Delta t_r.$$

$t_0$  bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem der Stoßvorgang beginnt. Im allgemeinen ist dies der Zeitpunkt, zu dem die Spitze des Körpers die Flüssigkeitsoberfläche erreicht.  $t_R$  gibt das Ende der Rechnung an. Im allgemeinen wird  $t_R$  so gewählt, daß  $c(t_R) = L$  ist, d. h. die Rechnung ist beendet, wenn die eingetauchte Breite gleich der Breite des Körpers ist.

Die Rechnung wurde so aufgebaut, daß jeder Abschnitt in sich geschlossen berechnet wird und daß aus der vorhergegangenen Rechnung nur die Anfangsbedingungen für den jeweiligen Abschnitt bekannt sein müssen.

#### 2. Ansätze zur Berechnung der Plattenverformung und der Eintauchgeschwindigkeit

Zur Berechnung der Integrale für  $w_n(t)$  und  $\dot{w}_n(t)$  in den Gleichungen (37) und (38) kommen im wesentlichen drei Näherungsansätze für den Verlauf von  $q_n(t)$  in den Zeitintervallen  $\Delta t_r$  in Betracht:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } q_n(t) = q_n(t_{r-1}) \\ \text{b) } q_n(t) = \frac{1}{2} q_n(t_{r-1}) + \frac{1}{2} q_n(t_r) \\ \text{c) } q_n(t) = \\ \quad = \frac{t_r - t}{\Delta t_r} q_n(t_{r-1}) + \frac{t - t_{r-1}}{\Delta t_r} q_n(t_r) \end{array} \right\} t_{r-1} \leq t \leq t_r.$$

Der Verfasser hat eine quantitative Untersuchung über die Fehler dieser drei Ansätze durchgeführt, deren allgemeine Ergebnisse hier zusammengefaßt werden sollen:

Der Ansatz a), in dem  $q_n$  konstant und gleich dem Anfangswert ist, ist besonders angenehm für die Rechnung, da der Anfangswert bekannt ist. Die Fehler bei diesem Ansatz sind groß und erfordern sehr kleine Zeitabschnitte.

Der Ansatz b), in dem  $q_n$  konstant und gleich dem Mittelwert im Zeitabschnitt ist, ist wesentlich genauer. Man muß dafür das zunächst unbekanntes  $q_n(t_r)$  iterativ bestimmen.

Der Ansatz c), der einen linearen Verlauf von  $q_n(t)$  im Zeitabschnitt annimmt, halbiert die Fehler gegenüber der Rechnung mit dem Ansatz b), ohne daß der Rechenaufwand wesentlich größer wird.

Es erweist sich aus anderen Gründen, die später in diesem Kapitel dargelegt werden, als zweckmäßig, die Iteration in Kauf zu nehmen und dafür mit weniger Zeitabschnitten zu arbeiten. Die Genauigkeit der gesamten Rechnung ist sehr stark von der Genauigkeit bei der Berechnung der Verformungen abhängig. Deswegen wird der genaueste Ansatz, nämlich c) benutzt.

Es ergibt sich damit

$$\int_{t_{r-1}}^{t_r} q_n(t') \sin \omega_n(t - t') \cdot dt' = \frac{1}{\omega_n} \{ q_n(t_{r-1}) g_1(\omega_n \Delta t_r) + q_n(t_r) g_2(\omega_n \Delta t_r) \} \quad (63)$$

$$\int_{t_{r-1}}^{t_r} q_n(t') \cos \omega_n(t - t') \cdot dt' = \frac{1}{\omega_n} \{ q_n(t_{r-1}) g_3(\omega_n \Delta t_r) + q_n(t_r) g_4(\omega_n \Delta t_r) \} \quad (64)$$

wobei die Funktionen  $g$  folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{\sin x}{x} - \cos x; & g_2(x) &= 1 - \frac{\sin x}{x} \\ g_3(x) &= \sin x - \frac{1 - \cos x}{x}; & g_4(x) &= \frac{1 - \cos x}{x}. \end{aligned} \quad (65)$$

Unabhängig von diesem Ansatz für die Koeffizienten  $q_n(t)$  wird auch für die Beschleunigung  $\ddot{\eta}(t)$  ein Ansatz gemacht. Bei der Berechnung der Geschwindigkeit  $\dot{\eta}(t)$  sind die Ansätze b) und c) gleichwertig. Es soll deswegen gelten:

$$\dot{\eta}(t_r) = \dot{\eta}(t_{r-1}) + \frac{\Delta t_r}{2} [\ddot{\eta}(t_{r-1}) + \ddot{\eta}(t_r)]. \quad (66)$$

#### 3. Lösung der Integralgleichung für $U$

Die Lösung der Integralgleichung (55) mit Hilfe der Rechteck- oder Trapezregel ist nicht möglich, weil der Kern der Integralgleichung bei  $x = c$  nicht beschränkt ist. Man kann die Integralgleichung jedoch einfach lösen, wenn man einen Ansatz für den Verlauf der gesuchten Funktion  $U$  und für die Koeffizienten des Kerns macht.

$U(t)$  ist das Verhältnis zweier Geschwindigkeiten, und zwar der Eintauchgeschwindigkeit  $\dot{\eta}(t)$  und der Geschwindigkeit  $\dot{c}(t)$ , mit der die eingetauchte Breite zunimmt. Unter den Voraussetzungen, die für die Form des Stoßkörpers gemacht wurden, erfährt dieser Quotient nur langsame Änderungen. Deswegen wird gesetzt:

$$U(t) \cong \frac{1}{2} [U(t_{r-1}) + U(t_r)] = U_r; \quad t_{r-1} \leq t \leq t_r. \quad (67)$$

Für die Koeffizienten des Kerns  $a_{2m}(t)$  wird näherungsweise gesetzt:

$$\frac{a_{2m}(t)}{\eta(t)} \cong A_{2m}(t) \cong \frac{1}{2} [A_{2m}(t_{r-1}) + A_{2m}(t_r)] = A_{r,2m}. \quad (68)$$

Mit diesen beiden Ansätzen geht die Integralgleichung (55) über in:

$$y_{b0}(x_r) + v(x_r, t_r) = \sum_{\varrho=1}^r U_{\varrho} \left\{ \int_{x_{\varrho-1}}^{x_{\varrho}} \frac{dc}{\sqrt{1 - (c/x_r)^2}} + A_{\varrho,0} \int_{x_{\varrho-1}}^{x_{\varrho}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - (c/x_r)^2}} \right) dc + \sum_{m=1}^{\infty} A_{\varrho,2m} \int_{x_{\varrho-1}}^{x_{\varrho}} \left( \frac{c/x_r}{1 + \sqrt{1 - (c/x_r)^2}} \right)^{2m} dc \right\}.$$

Es werden jetzt folgende Bezeichnungen eingeführt

$$Z_0(x_r, t_{\varrho}) = \int_{x_{\varrho-1}}^{x_{\varrho}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - (c/x_r)^2}} \right) dc \quad (69)$$

$$Z_{2m}(x_r, t_{\varrho}) = \int_{x_{\varrho-1}}^{x_{\varrho}} \left( \frac{c/x_r}{1 + \sqrt{1 - (c/x_r)^2}} \right)^{2m} dc; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

außerdem sei:

$$\delta(x_r, t_{\varrho}) = (x_{\varrho} - x_{\varrho-1}) - Z_0(x_r, t_{\varrho}) + \sum_{m=0}^{\infty} A_{\varrho,2m} \cdot Z_{2m}(x_r, t_{\varrho}). \quad (70)$$

Aus der Ableitung der Integralgleichung (6) ist zu sehen, daß die rechte Seite der Integralgleichung  $y_f$  ist, die Ordinate der freien Oberfläche. Man kann also schreiben:

$$y_f(x_r, t_{\varrho}) = \sum_{R=1}^{\varrho} U_R \cdot \delta(x_r, t_R). \quad (71)$$

Mit diesen Festsetzungen läßt sich die Integralgleichung nach  $U_r$  in folgender Weise auflösen:

$$U_r = \frac{y_{b0}(x_r) + y(x_r, t_r) - y_f(x_r, t_{r-1})}{\delta(x_r, t_{\varrho})}. \quad (72)$$

Es folgt dann aus Gleichung (67) für  $U(t_r)$ :

$$U(t_r) = 2 U_r - U(t_{r-1}). \quad (76a)$$

Zur Berechnung der eingetauchten Breite bleibt nur die Rechteckregel. Es folgt damit aus Gleichung (56):

$$c(t_r) = c(t_0) + \sum_{\varrho=1}^r \frac{\dot{\eta}_{\varrho}}{U_{\varrho}} \Delta t_{\varrho} \quad (73)$$

wobei:

$$\dot{\eta}_{\varrho} = \frac{1}{2} [\dot{\eta}(t_{\varrho-1}) + \dot{\eta}(t_{\varrho})]. \quad (74)$$

Im allgemeinen ist  $c(t_0) = 0$ .

Die Auflösung der Integralgleichung in der angegebenen Weise macht es erforderlich, die Ordinaten der freien Oberfläche nach Gleichung (71) an allen Punkten  $x_r$  zu berechnen, die als eingetauchte Breiten während der Rechnung vorkommen. Deswegen ist es zunächst zweckmäßig, für das Ende der Abschnitte die halbe Breite  $c(t_r)$  und nicht  $t_r$  vorzugeben. Trotzdem bedeutet die Berechnung der Ordinaten für alle Abschnittsgrenzen einen so großen Aufwand und erfordert so viel Speicherplatz, daß dies mit den Möglichkeiten der IBM 650 nicht zu vereinbaren ist. (Für die späteren Rechnungen wird der Vorgang in 79 bzw. 158 Abschnitte unterteilt.)

Es wird deswegen noch folgende Vereinfachung vorgenommen:

Die Ordinaten der freien Oberfläche  $y_f(x_r, t_{\varrho})$  werden nach Gleichung (71) nur für eine bestimmte, nicht sehr große Zahl  $H$  von Abszissenwerten außerhalb der eingetauchten Breite  $c(t_{\varrho})$  berechnet, also für  $x_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}, \dots, x_{\varrho+H}$ . Zu Beginn der Rechnung für den Abschnitt mit der Nummer  $r$  liegen also die Ordinaten  $y_f(x_r, t_{r-1}), y_f(x_{r+1}, t_{r-1}), \dots, y_f(x_{r+H-1}, t_{r-1})$  vor. Während der Rechnung für diesen Abschnitt wird  $y_f(x_r, t_{r-1})$  in der Gleichung (72) verarbeitet. Es wird dann nicht weiter benötigt. Für die Berechnung der nächsten Abschnitte muß jetzt aber die Ordinate  $y_f(x_{r+H}, t_{r-1})$  vorliegen.

Diese Ordinate wird durch Extrapolation aus  $y_f(x_{r+H-1}, t_{r-1})$  gewonnen. Zur Extrapolation wird die Gleichung der freien Oberfläche für einen starren Keilkörper benutzt:

$$y_{f, \text{starr}}(x_r, t_{\varrho}) = U \cdot x_r \arcsin \left( \frac{x_{\varrho}}{x_r} \right).$$

Bei der Extrapolation soll so verfahren werden, daß die Ordinate der freien Oberfläche im unendlich fernen Punkt richtig berechnet wird. Es ist leicht zu zeigen, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_f(x, t_{\varrho}) = \eta(t_{\varrho})$$

ist, weil  $\eta$  die Lage des Bezugspunktes  $S$  in einem raumfesten Koordinatensystem bzw. die Bewegung der unendlich fernen Flüssigkeit gegenüber dem Körper angibt. Aus diesen Bedingungen folgt die Extrapolationsgleichung:

$$y_f(x_{r+H}, t_{r-1}) = [y_f(x_{r+H-1}, t_{r-1}) - u(t_{r-1})] \cdot \frac{x_{r+H} \cdot \arcsin(x_{r-1}/x_{r+H})}{x_{r+H-1} \cdot \arcsin(x_{r-1}/x_{r+H-1})} + u(t_{r-1}) \quad (75)$$

dabei ist:

$$u(t_{r-1}) = \eta(t_{r-1}) - U(t_0) x_{r-1}. \quad (76)$$

$\eta$  soll ebenfalls nach der Rechteckregel berechnet werden:

$$\eta(t_r) = \eta(t_{r-1}) + \Delta t_r \cdot \dot{\eta}_r. \quad (77)$$

Es soll in der Rechnung immer zuerst die Extrapolation nach Gleichung (75) erfolgen und dann die Berechnung der Ordinaten für die Zeit  $t_r$  nach Gleichung (71).

## B. Einführung der Matrix-Schreibweise

Für die numerische Rechnung müssen die unendlichen Reihen durch endliche Teilsummen ersetzt werden. Dabei sei die Anzahl der Reihenglieder für die Schwingungsgleichung  $N$ . Zur Berechnung des Drucks und der Geschwindigkeiten der freien Oberflächen sollen  $M$  Reihenglieder benutzt werden.

Die Gleichungen lassen sich besonders übersichtlich schreiben, wenn man dafür Matrizen benutzt. Bei den Rechnungen auf der elektronischen Rechenanlage hat man den Vorteil, daß durch die Verwendung eines Interpretationsprogramms die Programmierung der Matrix-Operationen wesentlich erleichtert wird.

In der Nomenklatur, Abschnitt 3, findet sich die Definition der benutzten Matrizen und Vektoren.

Aus den Gleichungen (36), (49), (50) und (51) ergibt sich mit diesen Matrizen

$$\ddot{w}(t) = q(t) - w(t)$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \mathfrak{B} \left( \frac{\pi c}{L} \right) \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t)$$

$$b(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \mathfrak{B} \left( \frac{\pi c}{L} \right) \ddot{w}(t)$$

$$q(t) = \frac{\pi \rho c \dot{\eta}^2(t)}{4U(t)} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} r \left( \frac{\pi c}{L} \right) +$$

$$+ \frac{\pi \rho c^2 \dot{\eta}(t)}{4} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} m \left( \frac{\pi c}{L} \right) - \frac{\pi \rho c \dot{\eta}(t)}{4U(t)} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \Re \left( \frac{\pi c}{L} \right) a(t) -$$

$$- \frac{\pi \rho c^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \Im \left( \frac{\pi c}{L} \right) b(t) + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} \dot{\eta}(t) \cdot n + f(t).$$

Man kann diese Gleichungen zusammenfassen und nach  $q(t)$  auflösen:

$$q(t) = \left( \mathfrak{G} + \frac{\pi \rho c^2}{2\mu_B L} \Im \mathfrak{B} \right)^{-1} \cdot \left\{ \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{4U} \left[ \dot{\eta} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} r - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\mu_B L} \Re \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t) \right] + \left( \frac{\pi \rho c^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} m + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} n \right) \dot{\eta}(t) + \frac{\pi \rho c^2}{2\mu_B L} \Im \mathfrak{B} w(t) + f(t) \left. \right\}. \quad (78)$$

Aus Gleichung (53) folgt für  $\dot{\eta}(t)$ :

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{M_1 + M_2 + \frac{\pi \rho c^2}{2}} \left\{ \frac{\pi \rho c \dot{\eta}(t)}{U(t)} \left[ -\dot{\eta} + \right. \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} g^T \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t) \right] + \left( \frac{\pi \rho c^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} g^T \mathfrak{B} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} n^T \right) (q(t) - w(t)) + \Sigma K(t) \left. \right\} \quad (79)$$

Der besseren Übersicht wegen sollen folgende Bezeichnungen benutzt werden:

$$\mathfrak{A} = \frac{\pi \rho c^2}{2\mu_B L} \Im \mathfrak{B} + \mathfrak{G}$$

$$\Gamma^T = \frac{\pi \rho c^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} g^T \mathfrak{B} + \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} n^T$$

$$\Pi = \frac{\pi \rho c^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} m + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} n.$$

Damit ist:

$$q(t) = \mathfrak{A}^{-1} \left\{ \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{4U} \left[ \dot{\eta} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} r - \frac{2}{\mu_B L} \Re \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right] + \right.$$

$$\left. + \Pi \dot{\eta} + \frac{\pi \rho c^2}{2\mu_B L} \Im \mathfrak{B} w + f \right\} \quad (78a)$$

$$\dot{\eta}(t) =$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + \frac{\pi \rho c^2}{2}} \left\{ \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{U} \left[ -\dot{\eta} + \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} g^T \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right] + \right.$$

$$\left. + \Gamma^T (q(t) - w(t)) + \Sigma K(t) \right\}. \quad (79a)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich noch zusammenfassen und nach  $\dot{\eta}(t)$  bzw.  $q(t)$  auflösen. Man berechnet zweckmäßigerweise das Skalar  $\dot{\eta}(t)$ , weil man dann nur einmal ein lineares Gleichungssystem zu lösen hat. Es ergibt sich:

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{M_1 + M_2 + \frac{\pi \rho c^2}{2} - \Gamma^T \mathfrak{A}^{-1} (\Pi)} \cdot \left\{ \frac{\pi \rho c \dot{\eta}}{U} \left[ -\dot{\eta} + \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} g^T \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right] + \Sigma K(t) + \right.$$

$$\left. + \Gamma^T \left[ \mathfrak{A}^{-1} \left( \frac{\pi \rho c}{4U} \left\langle \dot{\eta} \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} r - \frac{2}{\mu_B L} \Re \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right\rangle + \frac{\pi \rho c^2}{2\mu_B L} \Im \mathfrak{B} w(t) + f(t) \right) - w(t) \right] \right\}. \quad (80)$$

Diese Gleichung faßt die Wirkungen der gesamten Vorgeschichte auf die Beschleunigung  $\dot{\eta}(t)$  zusammen. Ist  $\dot{\eta}(t)$  bekannt, so lassen sich alle weiteren Größen zur Zeit  $t$  berechnen.

Die Matrizen  $\mathfrak{B}(\pi c/L)$ ,  $\Im(\pi c/L)$ ,  $\Re(\pi c/L)$ ,  $m(\pi c/L)$ ,  $r(\pi c/L)$  und damit auch die Matrizen  $\mathfrak{A}^{-1}$ ,  $\Gamma^T$ ,  $\Pi$ , sowie  $\Re \mathfrak{B}$  und  $\Im \mathfrak{B}$  lassen sich aus der Matrix  $\mathfrak{M}(\pi c/L)$  berechnen. Für jedes vorkommende  $c(t_r)$  muß die Matrix  $\mathfrak{M}$  berechnet werden. Außerdem müssen alle abgeleiteten Matrizen bestimmt werden. Es ist deswegen zweckmäßig, das Ende der einzelnen Rechenabschnitte durch  $c(t_r)$  festzulegen. Man hat die angegebenen Matrizen dann nur einmal in jedem Abschnitt zu berechnen.

Der Aufwand bei der Berechnung der Matrizen ist aber auch so groß, daß es zweckmäßig ist, mit großer Schrittweite zu rechnen und dafür die Iteration in jedem Rechenabschnitt in Kauf zu nehmen.

Es werden jetzt auch die übrigen Gleichungen umgeschrieben, soweit es erforderlich ist.

Aus den Gleichungen (37) und (38) folgt in Verbindung mit den Gleichungen (63) und (64) für  $w(t_r)$  und  $\dot{w}(t_r)$ :

$$w(t_r) = \mathfrak{G}(\Delta t_r) w(t_{r-1}) + \mathfrak{G}(\Delta t_r) \dot{w}(t_{r-1}) +$$

$$+ \mathfrak{G}_1(\Delta t_r) q(t_{r-1}) + \mathfrak{G}_2(\Delta t_r) q(t_r) \quad (81)$$

$$\dot{w}(t_r) = -\mathfrak{G}(\Delta t_r) w(t_{r-1}) + \mathfrak{G}(\Delta t_r) \dot{w}(t_{r-1}) +$$

$$+ \mathfrak{G}_3(\Delta t_r) q(t_{r-1}) + \mathfrak{G}_4(\Delta t_r) q(t_r). \quad (82)$$

Zur Bestimmung von  $U$  folgt aus Gleichung (70):

$$\delta(x_r, t_r) = \Delta c_r - Z_0(x_r, t_r) + \dot{z}^T(x_r, t_r) \bar{A}_r \quad (83)$$

wobei:

$$\Delta c_r = c(t_r) - c(t_{r-1})$$

$$\bar{A}_r = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \Im \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\dot{\eta}(t_{r-1})} \dot{w}(t_{r-1}) + \frac{1}{\dot{\eta}(t_r)} \dot{w}(t_r) \right]. \quad (85)$$

Es gilt für  $y(x_r, t_r)$ :

$$y(x_r, t_r) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \bar{Y}(x_r) \bar{\omega}^2 w(t_r). \quad (86)$$

Für die Berechnung der freien Oberfläche gilt:

$$f(t_r) = f_0(t_{r-1}) + U_r [\Delta c_r \cdot e - \bar{Z}_0(x_r, t_r) + \mathfrak{B}(x_r, t_r) \cdot \bar{A}_r]. \quad (87)$$

Zur Auswertung der Rechnung benötigt man noch folgende Vektoren für die Druckverteilung, die Verformung der Bodenplatte, ihre Geschwindigkeit und ihre Beschleunigung, sowie für die Biegespannung an der Plattenoberseite:

$$p(t_r) = \frac{\rho \dot{\eta}^2(t_r)}{U(t_r)} \delta + \rho c_r \dot{\eta}(t_r) c -$$

$$- \frac{\rho \dot{\eta}(t_r)}{U(t_r)} \mathfrak{P}_c a(t_r) - \rho c(t) \mathfrak{P} b(t_r) \quad (88)$$

$$\dot{v}(t_r) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \mathcal{D} \bar{\omega}^{-2} w(t_r) \quad (89)$$

$$\ddot{v}(t_r) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \mathcal{D} \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t_r) \quad (90)$$

$$\ddot{v}(t_r) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \mathcal{D} (q(t_r) - w(t_r)) \quad (91)$$

$$\bar{\sigma}_b(t_r) = \sqrt{\frac{2}{\mu_B L}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_B}{EI} \cdot \frac{EI}{W}} \mathcal{D} \bar{\omega}^{-1} w(t_r) \quad (92)$$

Wird durch  $f(t)$  die Erdbeschleunigung berücksichtigt, so ist

$$f(t) = - \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B L}{2}} \cdot g \cdot n.$$

## C. Einführung dimensionsloser Größen

### 1. Wahl der charakteristischen Größen

Zur Berechnung des hydroelastischen Stoßes wird von mir folgendes System dimensionsloser Größen benutzt:

Es werden zwei charakteristische Längen, eine charakteristische Zeit und eine charakteristische Masse eingeführt. Alle Längen in horizontaler Richtung werden auf die Länge  $L$  bezogen, und zwar ist  $L$  die größte halbe Breite des Modells. Alle Längen in vertikaler Richtung werden auf die reduzierte Länge  $L \cdot 2\beta/\pi$  bezogen. Dies ist die Eintauchung eines starren Modells, wenn die eingetauchte halbe Breite gerade  $L$  ist. Als charakteristische Zeit wird die Zeit benutzt, die vergeht, bis bei unverzögerter Eintauchung die eingetauchte halbe Breite  $L$  ist. Also ist die charakteristische Zeit:  $2\beta L/\pi V_0$ . Alle Massen werden bezogen auf die hydrodynamische Masse der einen Seite der Platte mit der Breite  $2L$ . Diese ist  $\pi \rho L^2/2$ .

Aus den beiden charakteristischen Längen für die vertikalen und die horizontalen Abmessungen ergeben sich zwei charakteristische Geschwindigkeiten und zwei charakteristische Beschleunigungen.

Die Definitionen der benutzten dimensionslosen Größen sind in der Nomenklatur, Abschnitt 2, zusammengestellt. Dimensionslose Größen werden durch einen Stern gekennzeichnet (\*).

Zur Beschreibung eines hydroelastischen Stoßes unter Vernachlässigung aller äußeren Kräfte außer den instationären hydrodynamischen Kräften sind drei Kenngrößen erforderlich. Es sollen benutzt werden: die dimensionslose Masse des gesamten Modells  $M^*$ , die dimensionslose Masse des elastischen Teils  $M_2^*$  und die dimensionslose Grundfrequenz der Bodenplatten gegenüber dem starren Rumpf  $f^*$ . Die beiden Massenkennzahlen sind spezielle Formen der Newtonschen Kennzahl. Die Frequenzkennzahl ist eine spezielle Form der Cauchyschen Kennzahl für elastische Probleme.

Es gelten folgende Definitionen:

$$M^* = \frac{2(M_1 + M_2)}{\pi \rho L^2}; \quad M_2^* = \frac{4\mu_B L}{\pi \rho L^2}; \quad f^* = \frac{\beta}{LV_0} \sqrt{\frac{EI}{\mu_B}}$$

Werden außer den instationären hydrodynamischen Kräften noch weitere Kräfte berücksichtigt, so ist im allgemeinen für jeden Typ von Kräften noch eine weitere Kenngröße erforderlich. Als einzige weitere Kraft wird die Schwerkraft in

die Betrachtungen einbezogen. Als Kenngröße soll die dimensionslose Erdbeschleunigung benutzt werden:

$$g^* = \frac{2\beta L \cdot g}{\pi V_0^2}$$

Diese Kenngröße ist eine spezielle Form der Froudeschen Kennzahl.

### 2. Ähnlichkeitsbetrachtung

Beschränken wir uns zunächst darauf, daß nur die instationären hydrodynamischen Kräfte von Bedeutung sind, so haben zwei Körper des gleichen Konstruktionstyps im Rahmen der geltenden Einschränkungen dann ähnliches Stoßverhalten, wenn für sie die drei Kenngrößen  $M^*$ ,  $M_2^*$  und  $f^*$  übereinstimmen.

Es sollen die Ähnlichkeitseigenschaften für zwei Sonderfälle betrachtet werden:

Setzt man erstens geometrisch ähnliche Modelle aus dem gleichen Material voraus und handelt es sich um die gleiche Flüssigkeit, so ist die Newtonsche Ähnlichkeit, gekennzeichnet durch  $M^*$  und  $M_2^*$ , immer gewährleistet. Die Cauchysche Ähnlichkeit, charakterisiert durch  $f^*$ , ist immer dann erfüllt, wenn beide Körper die gleiche Auftreffgeschwindigkeit haben. Zur Umrechnung von Modellversuchen bei elastischen Modellen gilt damit: Die Drücke, Spannungen und Geschwindigkeiten sind für Modell und Großausführung an ähnlichen Punkten zu ähnlichen Zeiten gleich groß. Die Kräfte, Zeiten und Verformungen sind proportional einer charakteristischen Länge, die Beschleunigungen sind umgekehrt proportional einer charakteristischen Länge.

Es soll im zweiten Sonderfall vorausgesetzt werden, daß sich zwei Modelle nur im Kielungswinkel  $\beta$  unterscheiden. Auch hier ist die Newtonsche Ähnlichkeit infolge der Voraussetzung kleiner Winkel immer erfüllt. Die Kenngrößen  $f^*$  sind immer dann gleich, wenn die Auftreffgeschwindigkeiten proportional dem Kielungswinkel  $\beta$  sind. Es gilt dann für die Umrechnung: Die Zeiten und die Horizontalkomponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind gleich groß. Die Verformungen, die Vertikalkomponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, die Drücke, Spannungen und Kräfte sind proportional dem Kielungswinkel  $\beta$ .

Sind außer den instationären hydrodynamischen und den elastischen Kräften noch weitere Kräfte von Bedeutung, so gelingt es im allgemeinen nicht, die Ähnlichkeitsbedingungen zu erfüllen. Hat z. B. die Schwerkraft einen wesentlichen Einfluß, so müßte gleichzeitig Cauchysche und Froudesche Ähnlichkeit gelten. Das ist praktisch nicht zu erreichen. Es ist deshalb nicht möglich, in Modellversuchen Stöße im Seegang zu untersuchen, bei denen die Elastizität einen wesentlichen Einfluß hat. Es ist um so wichtiger, für dieses Problem zu theoretischen Lösungen zu kommen.

Sind die Modelle nicht vom gleichen Konstruktionstyp, so sind die Kenngrößen höchstens zu Abschätzungen zu gebrauchen.

### 3. Dimensionslose Form der Gleichungen

Es werden jetzt die Gleichungen, die zur Berechnung des hydroelastischen Stoßes von Bedeutung sind, in dimensionslose Form umgeschrieben. Die Gleichungen erhalten die gleiche Numerierung wie die entsprechenden dimensionsbehafteten Gleichungen. Die Numerierung erhält einen Stern als Zusatz (\*). (Achtung! Die Sterne an den dimensionslosen

Größen werden in den Gleichungen fortgelassen, um die Lesbarkeit zu verbessern. Es handelt sich im folgenden stets um dimensionslose Größen!

Es gilt:

$$\mathfrak{A} = \frac{2c^2}{M_2} \mathfrak{Q} \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

$$\Gamma^r = \frac{4c^2}{\pi M_2} g^r \mathfrak{B} + \frac{8}{\pi^2} n^r$$

$$\Pi = \frac{\pi c^2}{4} m + \frac{M_2}{2} n$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}(t) = & \frac{1}{\frac{1}{2}(M+c^2) - \Gamma^r \mathfrak{A}^{-1} \Pi} \left\{ \frac{c\dot{\eta}}{U} \left[ -\dot{\eta} + \frac{8}{\pi M_2} g^r \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2} M \sum K + \Gamma^r \left[ \mathfrak{A}^{-1} \left( \frac{c\dot{\eta}}{U} \left( \frac{\pi}{4} \dot{\eta} r - \frac{2}{M_2} \mathfrak{R} \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2c^2}{M_2} \mathfrak{Q} \mathfrak{B} w + \mathfrak{f} \right) - w \right] \right\} \quad (80^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t) = & \mathfrak{A}^{-1} \left\{ \frac{c\dot{\eta}}{U} \left[ \dot{\eta} \frac{\pi}{4} r - \frac{2}{M_2} \mathfrak{R} \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w} \right] + \Pi \dot{\eta} + \right. \\ & \left. + \frac{2c^2}{M_2} \mathfrak{Q} \mathfrak{B} w + \mathfrak{f} \right\} \quad (78a^*) \end{aligned}$$

Die übrigen Gleichungen sind entsprechend ihrer Numerierung geordnet.

$$\dot{\eta}(t_r) = \dot{\eta}(t_{r-1}) + \Delta t_r \cdot \frac{1}{2} \{ \ddot{\eta}(t_{r-1}) + \ddot{\eta}(t_r) \} \quad (66^*)$$

$$U(t_r) = 2 U_r - U(t_{r-1}) \quad (67a^*)$$

$$U_r = \frac{\frac{\pi}{2} c_r + y(c_r, t_r) - y_f(c_r, t_{r-1})}{\delta(c_r, t_r)} \quad (72^*)$$

$$\Delta t_r = \Delta c_r \cdot \frac{U_r}{\dot{\eta}_r} \quad (73^*)$$

$$\dot{\eta}_r = \frac{1}{2} \{ \dot{\eta}(t_{r-1}) + \dot{\eta}(t_r) \} \quad (74^*)$$

$$\begin{aligned} y_f(x_{r+H}, t_{r-1}) = & [y_f(x_{r+H-1}, t_{r-1}) - \\ & - u(t_{r-1})] \frac{x_{r+H} \cdot \arcsin(x_{r-1}/x_{r+H})}{x_{r+H-1} \cdot \arcsin(x_{r-1}/x_{r+H-1})} + u(t_{r-1}) \quad (75^*) \end{aligned}$$

$$u(t_{r-1}) = \eta(t_{r-1}) - c_{r-1} \quad (76^*)$$

$$\eta(t_r) = \eta(t_{r-1}) + \Delta t_r \cdot \dot{\eta}_r \quad (77^*)$$

$$\begin{aligned} w(t_r) = & \mathfrak{C}(\Delta t_r) w(t_{r-1}) + \mathfrak{C}(\Delta t_r) \dot{w}(t_{r-1}) + \\ & + \mathfrak{G}_1(\Delta t_r) q(t_{r-1}) + \mathfrak{G}_2(\Delta t_r) q(t_r) \quad (81^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}(t_r) = & -\mathfrak{C}(\Delta t_r) w(t_{r-1}) + \mathfrak{C}(\Delta t_r) \dot{w}(t_{r-1}) + \\ & + \mathfrak{G}_3(\Delta t_r) q(t_{r-1}) + \mathfrak{G}_4(\Delta t_r) q(t_r) \quad (82^*) \end{aligned}$$

$$\delta(c_r, t_r) = \Delta c_r - Z_0(c_r, t_r) + \delta^T(c_r, t_r) \cdot \bar{A}_r \quad (83^*)$$

$$\bar{A}_r = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{F} \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\dot{\eta}(t_{r-1})} \dot{w}(t_{r-1}) + \frac{1}{\dot{\eta}(t_r)} \dot{w}(t_r) \right] \quad (85^*)$$

$$y(c_r, t_r) = \frac{8}{\pi M_2} \bar{Y}(L \cdot c_r) \bar{\omega}^{-2} w(t_r) \quad (86^*)$$

$$f(t_r) = \dot{f}_0(t_r) + U_r [\Delta c_r \cdot e - \bar{Z}_0(c_r, t_r) + \mathfrak{B}(c_r, t_r) \cdot \bar{A}_r] \quad (87^*)$$

$$p(t) = \frac{\dot{\eta}^2(t)}{U(t)} \delta - \frac{\dot{\eta}(t)}{U(t)} \mathfrak{P}_c a(t) + c \dot{\eta}(t) \cdot c - c \mathfrak{P} b(t) \quad (88^*)$$

$$a(t) = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{B} \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t)$$

$$b(t) = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{B}(q(t) - w(t))$$

$$\eta(t) = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{D} \bar{\omega}^{-2} w(t) \quad (89^*)$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{D} \bar{\omega}^{-1} \dot{w}(t) \quad (90^*)$$

$$\ddot{\eta}(t) = \frac{8}{\pi M_2} \mathfrak{D}(q(t) - w(t)) \quad (91^*)$$

$$\bar{\sigma}_b(t) = \frac{24}{\pi} f \mathfrak{D} \bar{\omega}^{-1} w(t) \quad (92^*)$$

Wird in den Rechnungen die Erdbeschleunigung berücksichtigt, so ist:  $\sum K = g$ ,  $\mathfrak{f} = -\frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot g \cdot n$ .

In den meisten Beispielen wird der Einfluß der Erdbeschleunigung vernachlässigt. Es ist dann  $\sum K = 0$ ,  $\mathfrak{f} = 0$ . Man erreicht dies in der Rechnung, indem man setzt:  $g = 0$ . In einem Beispiel wird die Erdbeschleunigung berücksichtigt. Es wird dabei angenommen, daß die Bodenplatten unter der Wirkung der Erdbeschleunigung zur Zeit  $t_0$  in Ruhe sind. Man hat dann zu setzen:  $\sum K = g$ ,  $\mathfrak{f} = 0$ .

#### D. Schema des Rechnungsablaufs

Es sei festgelegt, wieviele Reihenglieder  $N$  und  $M$  und wieviele Ordinaten der freien Oberfläche berechnet werden. Es sei außerdem festgelegt, in wieviele Abschnitte  $R$  der Vorgang unterteilt wird. Es wurde darauf hingewiesen, daß es zweckmäßig ist, für die Abschnitte  $\Delta c_r$  und nicht  $\Delta t_r$  vorzuschreiben. Für alle Abschnitte wird  $\Delta c$  gleich groß gewählt. Das von mir aufgestellte Programm zur Berechnung der Lommel-Weber-Funktion ist auf Argumente mit höchstens drei Stellen nach dem Komma beschränkt. Es wurde deswegen  $\pi \Delta c = 0,04$  bzw.  $0,02$  gesetzt. Die Rechnung endet dadurch nicht genau bei  $c = 1$ , sondern bei  $c = 3,16/\pi$ .

In jedem Abschnitt wiederholt sich folgende Rechnung:

- Für den Anfang des Abschnitts mit der Nummer  $r$ , also zur Zeit  $t_{r-1}$ , sind aus den Anfangsbedingungen oder aus der Rechnung für den vorhergehenden Abschnitt die Größen:  $c_{r-1}$ ,  $t_{r-1}$ ,  $\eta(t_{r-1})$ ,  $\dot{\eta}(t_{r-1})$ ,  $U(t_{r-1})$  sowie  $w(t_{r-1})$ ,  $\dot{w}(t_{r-1})$  und  $f(t_{r-1})$  bekannt.
- Im Verlauf der Rechnung sind auch die Beschleunigung  $\ddot{\eta}(t_{r-1})$  und der Vektor  $q(t_{r-1})$  aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannt. Sonst lassen sich diese mit Hilfe der Gleichungen (80\*) und (78a\*) aus den Anfangsbedingungen berechnen. Für den Stoßbeginn  $t_0 = 0$  ist im allgemeinen  $\dot{\eta}(0) = 0$ ,  $q(0) = 0$ .
- Für das Ende des Abschnitts  $c = c_r$  seien die Matrizen  $\mathfrak{M}(\pi c_r)$  und  $\mathfrak{B}(c_r, t_r)$ , sowie die Vektoren  $\delta^T(c_r, t_r)$

$\dot{Y}(L, c_r)$  bekannt. Außerdem seien daraus  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{K}$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $\bar{Z}_0$  und  $\mathfrak{A}^{-1}$ ,  $\Gamma^T$ ,  $\Pi$  berechnet.

- d) Es wird zunächst ein Ansatz für  $\ddot{\eta}(t_r)$ ,  $\dot{q}(t_r)$  und  $\Delta t_r$  geschätzt, und zwar nach folgendem Schema:

α) Zu Beginn der Rechnung sei:

$$\begin{aligned} q(t_r) &= q(t_{r-1}) \\ \ddot{\eta}(t_r) &= \ddot{\eta}(t_{r-1}) \end{aligned}$$

β) Im Verlauf der Rechnung wird extrapoliert:

$$\begin{aligned} q(t_r) &= 2q(t_{r-1}) - q(t_{r-2}) \\ \ddot{\eta}(t_r) &= 2\ddot{\eta}(t_{r-1}) - \ddot{\eta}(t_{r-2}) \end{aligned}$$

Es wird immer gesetzt:

$$\Delta t_r = \Delta c_r \cdot U(t_{r-1}) / \ddot{\eta}(t_{r-1})$$

- e) Es wird  $u(t_{r-1})$  bestimmt nach Gleichung (76\*).
- f) Mit  $q(t_r)$  und  $\Delta t_r$  werden mit Hilfe der Gleichungen (81\*) und (82\*) die Vektoren  $w(t_r)$  und  $\dot{w}(t_r)$  berechnet. Nach Gleichung (66\*) wird mit  $\ddot{\eta}(t_r)$  und  $\Delta t_r$  die Größe  $\dot{\eta}(t_r)$  berechnet.
- g) Unter Benutzung der Gleichungen (85\*), (86\*), (70\*), (72\*) und (67a\*) läßt sich jetzt  $U_r$  und daraus  $U(t_r)$  berechnen.
- h) Man erhält ein verbessertes  $\Delta t_r$  nach Gleichung (73\*).
- i) Mit den Ergebnissen für  $\dot{\eta}(t_r)$ ,  $U(t_r)$ ,  $w(t_r)$ ,  $\dot{w}(t_r)$  läßt sich nach Gleichung (80\*) ein verbessertes  $\ddot{\eta}(t_r)$  und damit nach Gleichung (78a) auch ein verbessertes  $q(t_r)$  berechnen.
- k) Die Rechnung wird von f) ab so lange wiederholt mit den neu berechneten Werten für  $\ddot{\eta}(t_r)$ ,  $\Delta t_r$  und für  $q(t_r)$ , bis der Ansatz und das Ergebnis für  $\ddot{\eta}(t_r)$  um weniger als eine vorgegebene Zahl  $f$  voneinander abweichen.
- l) Es werden, falls erforderlich, die Vektoren  $p$ ,  $y$ ,  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$  und  $\bar{\sigma}_i$  nach den Gleichungen (88\*) bis (92\*) berechnet. — Aus Gründen der begrenzten Speicherkapazität werden diese Rechnungen in einem zweiten Arbeitsgang durchgeführt. Es werden dazu die Vektoren  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $b$  ausgegeben. —
- m) Zur Vorbereitung des nächsten Rechenschritts wird nach Gleichung (75\*) der Wert  $y_f(x_{r+H}, t_{r-1})$  durch Extrapolation bestimmt, und dann der Vektor  $f(t_{r-1})$  in den Vektor  $f_0(t_{r-1})$  übergeführt. Nach Gleichung (87\*) wird  $f(t_r)$  berechnet.
- n) Es folgt die Rechnung für den nächsten Abschnitt. Die Rechnung endet, wenn  $c > 1$  geworden ist.

## IV. Ergebnisse der Rechnung

### A. Beschreibung der durchgerechneten Beispiele

Mit dem Programm für die elektronische Rechanlage wurden auf der IBM 650 der Universität Hamburg mehrere Beispiele berechnet. Diese Beispiele lassen sich in zwei Gruppen aufteilen:

In der ersten Gruppe wird für einen bestimmten Modellfall (das Beispiel 0) der Rechenaufwand variiert, um die Zuverlässigkeit der Abschätzungen zu prüfen und die Wirkung der nicht untersuchten Einflüsse zu zeigen.

In der zweiten Gruppe wird ausgehend von einem Eckmodell (dem Beispiel 0) jede der vier dimensionslosen Kenngrößen  $M^*$ ,  $M_2^*$ ,  $f^*$  und  $g^*$  einmal variiert. Der Rechenaufwand ist in dieser Gruppe für alle Beispiele etwa gleich groß.

Es sollen zunächst die Beispiele der zweiten Gruppe beschrieben werden:

In der folgenden Tabelle 1 sind die dimensionslosen Kenngrößen für die fünf Beispiele zusammengestellt. Das Eckmodell wird mit 0 bezeichnet. Im Beispiel 1 ist  $M^*$ , im Beispiel 2 ist  $M_2^*$ , im Beispiel 3 ist  $f^*$  und im Beispiel 4 ist  $g^*$  gegenüber dem Eckmodell 0 verändert worden. Die Tabelle enthält außerdem für jedes Beispiel einen Satz dimensionsbehafteter Modelldaten, die nur der besseren Anschauung dienen.

Danach kann man sich das Eckmodell vorstellen als einen Keil mit einer Breite von 50 cm, einem Gewicht von 98 kg je Meter Länge. Die Bodenplatten sind aus Stahl und 2 mm dick. Der Kielungswinkel beträgt  $5^\circ$ . Dieses Modell fällt auf Wasser mit einer Geschwindigkeit von 1,25 m/sec auf, was einer Fallhöhe von etwa 8 cm entspricht.

Es werden jetzt die Beispiele der ersten Gruppe besprochen. Aus der Tabelle 2 ersieht man die Variationen des Rechenaufwandes:

Tabelle 2

Beispiel:	0-0	0-1	0-2	
Glieder der Schwingungsreihe	N	3	3	5
Glieder der Fourierreihe	M	11	11	13
Ordinaten d. freien Oberfläche	H	11	6	11
Schrittweite	$\Delta c^*$	0,04 / $\pi$	0,04 / $\pi$	0,02 / $\pi$
Grenze d. Iteration	f	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 1

Beispiel:	0	1	2	3	4	
$M^* = 2(M_1 + M_2) / \pi_0 L^2$	0,9986	1,9972	0,9986	0,9986	0,9986	
$M_2^* = 2M_2 / \pi_0 L^2$	0,07996	0,07996	0,15992	0,07996	0,07996	
$f^* = \beta / LV_0 \cdot \sqrt{EI} / \mu_B$	0,8527	0,8527	0,8527	1,8514	0,8527	
$g^* = g \cdot 2\beta L / \pi V_0^2$	0	0	0	0	0,0872	
Auftreffgeschw.	$V_0$ [m/sec]	1,25	1,25	2,50	0,625	1,25
Kielungswinkel	$\beta$ [°]	5	5	5	5	5
Gesamtmasse	$M_1 + M_2$ [kg sec <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> ]	10	20	10	10	10
1/2 Modellbreite	L [m]	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
Plattendicke	s [m]	0,002	0,002	0,004	0,002	0,002
Spez. Gew. d. Platte	$\gamma_B$ [kg/dm <sup>3</sup> ]	7,85	7,85	7,85	7,85	7,85
Elastizitätsmodul*)	E [kg/m <sup>2</sup> ]	$2,1 \cdot 10^{10}$				
Dichte d. Flüssigk.	$\rho$ [kg sec <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> ]	102	102	102	102	102
Erdbeschl.	g [m/sec <sup>2</sup> ]			vernachlässigt		9,81

\*) Es müßte hier statt des Elastizitätsmoduls der Plattenmodul eingesetzt werden, der um den Faktor  $1/(1-\nu^2)$  größer ist.

Der Rechenaufwand für das Beispiel 0-0 wird als Standard angesehen. Bei einer Schrittweite von  $\Delta c^* = 0,04/\pi$  benötigt man für die gesamte Rechnung 79 Rechenschritte. Die Rechnung mit vorbereiteten Matrizen dauert etwa vier Stunden. Die Vorbereitung der Matrizen, die für die übrigen Beispiele wieder verwendet werden, dauert etwa 5 Stunden. Die Zahl der Fourierglieder ist größer als unbedingt notwendig, ihre Zahl hat aber nur geringen Einfluß auf die Rechendauer. Die Zahl der Ordinaten H für die freie Oberfläche wurde so groß gewählt, wie sich mit der Speicherkapazität vereinbaren ließ. Die scharfe Bedingung für die iterative Berechnung von  $\ddot{\eta}^*$  mit einer zulässigen relativen Abweichung zwischen Ansatz und Ergebnis von  $f = 5 \cdot 10^{-7}$  ist deswegen angebracht, weil der Iterationsverlauf in den einzelnen Rechenschritten sehr unterschiedlich ist.

Das Beispiel 0-1 soll den Einfluß der Extrapolationsbedingung im Zusammenhang mit der Zahl der Ordinaten der freien Oberfläche zeigen. Eine Vergrößerung von H über 11 hinaus war nicht möglich; deswegen wurde die Zahl halbiert. Auf diese Weise läßt sich indirekt zeigen, wie die Fehler bei der Standardrechnung sein werden.

Das Beispiel 0-2 soll zeigen, ob die Abschätzungen des Kapitels IV den Verhältnissen entsprechen. Der Rechenaufwand steigt bei einer Verkleinerung der Schrittweite und einer Vergrößerung der Zahl der Reihenglieder N stark an. Deswegen wurde nur eine einzige Rechnung durchgeführt, bei der gleichzeitig die Schrittweite halbiert und N von 3 auf 5 heraufgesetzt wurde. Es wurde auch M von 11 auf 13 vergrößert. Diese Änderung ist jedoch unwesentlich. H mußte auch in diesem Beispiel 11 sein. Da aber die Schrittweite halbiert ist, bedeutet das, daß nur ein halb so großer Bereich der freien Oberfläche berechnet wird wie bei der Standardrechnung oder etwa der gleiche Bereich wie im Beispiel 0-1.

Für alle fünf Beispiele wurden jeweils zwei Vergleichsrechnungen durchgeführt. Es wurde erstens jedes Beispiel nach Wagner so behandelt, als ob es sich um einen starren Körper handelt. Die Rechnungen erhalten die Bezeichnung 0-W, 1-W, 2-W, 3-W und 4-W. Es sind die Beispiele 0-W, 2-W und 3-W identisch. Zweitens wurde für jedes Beispiel ein Vergleichsmodell nach Sydow berechnet. Diese Rechnungen erhalten die Bezeichnung 0-S, 1-S, 2-S, 3-S und 4-S. Das Vergleichsmodell wurde so bestimmt, daß dafür die Eigenfrequenz des Schwimmers gegenüber dem Rumpf gleich der Grundfrequenz der Bodenplatte und daß die Masse des Schwimmers gleich der Masse der Bodenplatten ist.

Die Vergleichsrechnung für das Sydow-Modell bietet eine ausgezeichnete Möglichkeit, das Programm zu prüfen, weil sich dieses Problem auch wesentlich einfacher und übersichtlicher lösen läßt. Die Rechnung gibt keinen Aufschluß über die Genauigkeit der Extrapolationsbedingung, weil diese hier exakt die freie Oberfläche erfüllt. Man hat aber eine gute Möglichkeit, die numerische Lösung der Integralgleichung für U zu überprüfen.

Es muß noch betont werden, daß die angegebenen Ergebnisse für das Vergleichsmodell nach Sydow nicht genau mit den Ergebnissen von J. Sydow [5] übereinstimmen, weil dort die Wagnersche Korrektur für einen Kielungswinkel von  $\beta = 18^\circ$  benutzt wurde, während hier die Näherung für kleine Kielungswinkel gilt.

Der Rechenaufwand für die fünf Parametervariationen ist in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tabelle 3

	0-0	1	2	3	4
N	3	3	3	2	3
M	11	11	11	8	11
H	11	11	11	11	11
$\Delta c^*$	0,012732	0,012732	0,012732	0,012732	0,012732
f	$5 \cdot 10^{-7}$				

### B. Ergebnisse der Genauigkeitskontrolle

In diesem Abschnitt werden zunächst Ergebnisse der Standardrechnung 0-0 besprochen. Es lassen sich hieraus schon wesentliche Folgerungen ziehen.

In den Diagrammen 2, 3 und 4 ist der Verlauf der Koeffizienten  $q_n^*(t^*)$ ,  $\dot{w}_n^*(t^*)$  und  $\ddot{w}_n^*(t^*)$  für die drei berechneten Schwingungsgrade dargestellt. Man erkennt die sehr gute Konvergenz der Beschleunigungen gegenüber der Erregung. Diese ist wesentliche Voraussetzung für das Funktionieren der Rechnung.

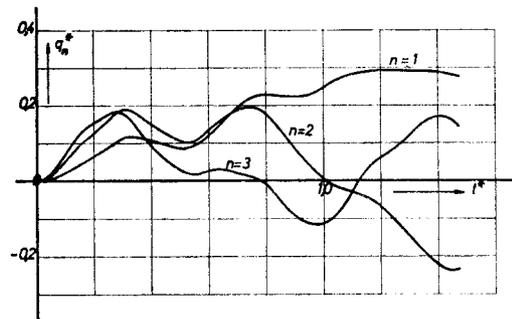


Diagramm 2 Verlauf der Erregungskoeffizienten  $q_n^*(t^*)$  für das Beispiel 0-0  
 $M^* = 0,9986$ ;  $M_2^* = 0,07996$ ;  $f^* = 0,8257$ ;  $g^* = 0$

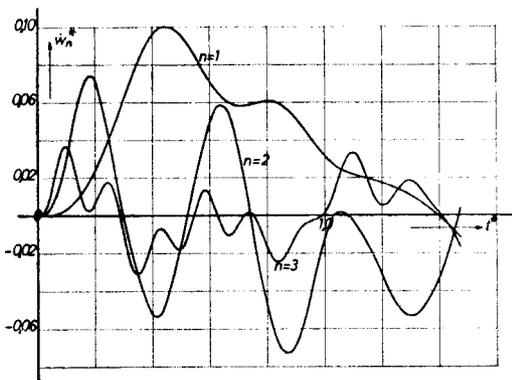


Diagramm 3 Verlauf der Geschwindigkeitskoeffizienten  $\dot{w}_n^*(t^*)$  für das Beispiel 0-0

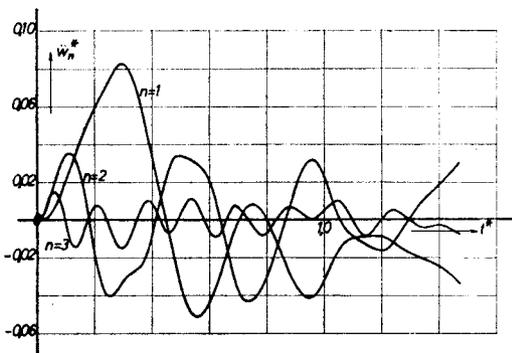


Diagramm 4 Verlauf der Beschleunigungskoeffizienten  $\ddot{w}_n^*(t^*)$  für das Beispiel 0-0

Im Diagramm 5 ist für die Beispiele 0—0, 0—1 und 0—S der Verlauf von  $U^*(t^*)$  dargestellt. Für den starren Keil (0—W) wäre  $U^* = 1$ .

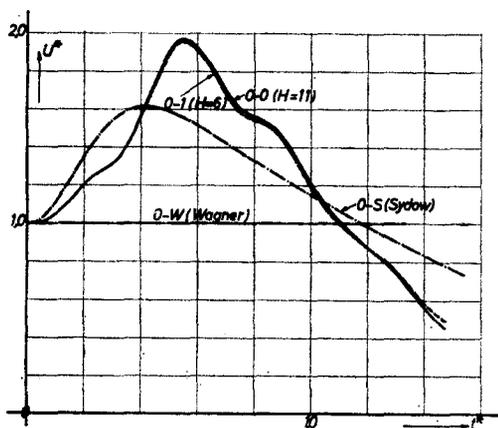


Diagramm 5 Verlauf des Quotienten  $U^*(t^*)$  für die Beispiele 0—0, 0—1, 0—S, 0—W

Die Vergleichsrechnung nach J. Sydow bot eine gute Gelegenheit, die Fehler bei der Auflösung der Integralgleichung für  $U$  festzustellen. Es läßt sich leicht zeigen, daß beim Sydow-Modell die Extrapolationsbedingung die freie Oberfläche exakt wiedergibt. Es läßt sich weiterhin leicht zeigen, daß einerseits  $\dot{c}^* = \dot{\eta}^* / U^*$ , andererseits aber  $\dot{c}^* = \dot{\eta}^* - \dot{v}^*$  ist. Die größte Abweichung zwischen den beiden so berechneten  $c^*$ -Werten beträgt während der Rechnung 0—S mit 79 Schritten etwa 0,04 %. Man geht sicher, wenn man diese Abweichung ganz dem Fehler bei der Berechnung von  $U^*$  zuschreibt. Wenn man auch erwarten muß, daß für das komplizierte System die Fehler größer werden, weil höherfrequente Anteile als konstant im Zeitintervall behandelt werden, so wird wegen der guten Konvergenz der Reihe für die Geschwindigkeit der Fehler doch klein bleiben. Er ist damit ohne Bedeutung für das Endergebnis im Vergleich zu den übrigen Fehlern.

Viel wesentlicher ist der Einfluß der Extrapolationsbedingung. Zur Klärung wurde die Rechnung 0—1 durchgeführt, bei der gegenüber der Standardrechnung 0—0 nur die Zahl der Ordinaten der freien Oberfläche  $H$  verändert wurde. Die Abweichung der  $U^*(t^*)$  für beide Rechnungen ist aus dem Diagramm 5 zu ersehen. Die Abweichung beträgt im Mittelbereich etwa 1 bis 2 %, am Ende jedoch etwa 7 %. Zur weiteren Beurteilung des Einflusses der Extrapolation betrachte man die Kurven  $\dot{\eta}^*(t^*)$  für die Rechnung 0—0 und 0—1 im Diagramm 8. Im Diagramm 6 ist die Differenz der Beschleunigungen für gleiche  $c^*$ -Werte dargestellt. Außerdem enthält

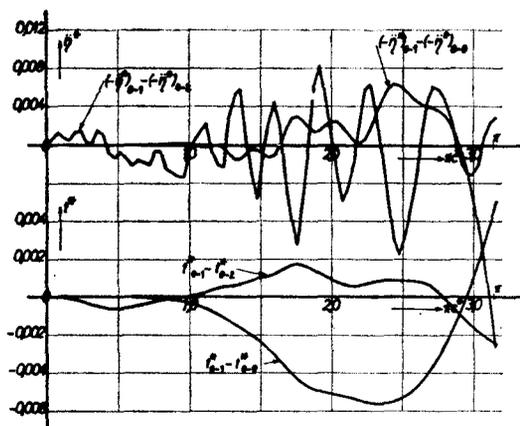


Diagramm 6 Differenz der Beschleunigungen und der Zeiten für die Beispiele 0—0 und 0—1 bzw. 0—1 und 0—2

dieses Diagramm die Differenz der zugehörigen Zeiten für gleiche  $c^*$ -Werte. Die größte Beschleunigungsdifferenz beträgt absolut 0,021, die größte Zeitdifferenz 0,0056. Die größte relative Abweichung beträgt bei der Beschleunigung 2,5 %, bei der Zeit 0,5 %.

Zur Beurteilung der Fehler hat man sich zu vergegenwärtigen, daß die Rechnung 0—0 mit  $H = 11$  als Standard gedacht ist. Der Fehler ist hierfür sicher wesentlich kleiner. Die Abweichung macht sich im übrigen erst von der Mitte der Rechnung ab bemerkbar. Bei den ersten sechs Rechenschritten verläuft die Rechnung gleich. Bei der höheren Zahl von Ordinaten treten die Fehler entsprechend später in Erscheinung. Die Oszillation der Beschleunigungsdifferenz ist auf eine kleine Phasenverschiebung bei  $\dot{w}_3^*$  zurückzuführen.

Es wird jetzt das Ergebnis der Rechnung 0—2 besprochen: Die Ergebnisse sind nicht direkt dargestellt worden. In dem schon besprochenen Diagramm 6 ist die Differenz der Beschleunigungen  $(\dot{\eta}^*)_{0-1} - (\dot{\eta}^*)_{0-2}$  und die Differenz der Zeiten  $(t^*)_{0-1} - (t^*)_{0-2}$  über  $\pi c^*$  aufgetragen:

Zu Beginn der Rechnung entspricht die Beschleunigungsdifferenz nach Größe und Frequenz genau dem Einfluß des fünften Schwingungsgrades. Da der Einfluß auf den Druck noch keine Rolle spielt, merkt man in der Beschleunigungsdifferenz nichts vom vierten Schwingungsgrad.

Im weiteren Verlauf der Rechnung ändert die Beschleunigungsdifferenz ihren Charakter. Amplitude und Frequenz der Differenzkurve weisen auf den Zusammenhang mit dem dritten Schwingungsgrad hin. Durch die feinere Schritteilung im Beispiel 0—2 werden die hydrodynamischen Massenkkräfte genauer erfaßt, und zwar werden sie größer als bei grober Teilung. Dadurch werden die Frequenzen niedriger als im Beispiel 0—1. Die Phasenverschiebung zwischen  $(\dot{w}_3^*)_{0-1}$  und  $(\dot{w}_3^*)_{0-2}$  beträgt am Schluß der Rechnung etwa  $90^\circ$ .

Auf die Berechnung von  $U^*$  hat die feinere Unterteilung nur geringen Einfluß, was nach dem oben Gesagten auch zu erwarten war.

Aus dem Vergleich der Drücke für die Beispiele 0—1 und 0—2 ergibt sich im Mittelbereich des eingetauchten Teils eine größte Druckdifferenz von 0,04. Zu Beginn der Rechnung ist die größte Druckdifferenz dagegen etwa 0,01. Durch den relativ großen Fehler des Drucks wird der typische Verlauf der Druckkurven  $p^*(t^*)$  nicht verfälscht. Man betrachte dazu das Diagramm 7, das den Druckverlauf für die Stelle  $x^* = 0,05$  aus den Beispielen 0—1 und 0—2 enthält.

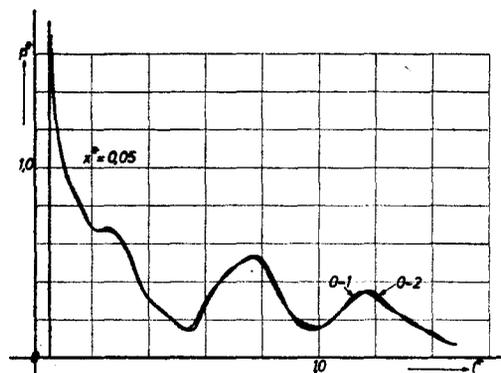


Diagramm 7 Vergleich des Druckverlaufs  $p^*(t^*)$  an der Stelle  $x^* = 0,05$  für die Beispiele 0—1 und 0—2

Man kann das Ergebnis der Genauigkeitskontrolle folgendermaßen zusammenfassen:

Die numerische Lösung der Integralgleichung für  $U$  und die Extrapolation der freien Oberfläche ergeben bei der Stan-

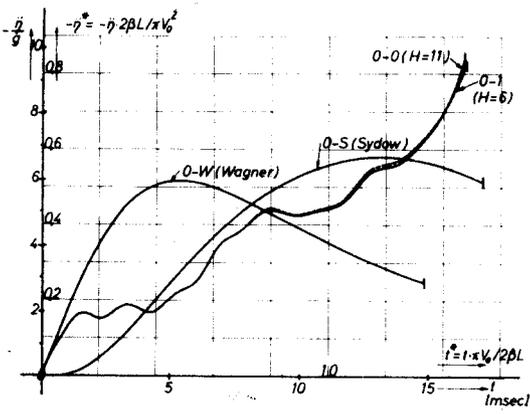


Diagramm 8 Rumpfbeschleunigung  $\eta^*(t^*)$  für die Beispiele 0-0, 0-1, 0-S und 0-W (Eckmodell)  
 $M^* = 0,9986$ ;  $M_D^* = 0,07996$ ;  $t^* = 0,8257$ ;  $\beta^* = 0$

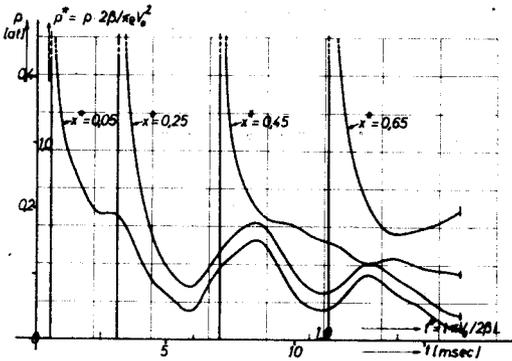


Diagramm 9 Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für das Beispiel 0-0 (Eckmodell)

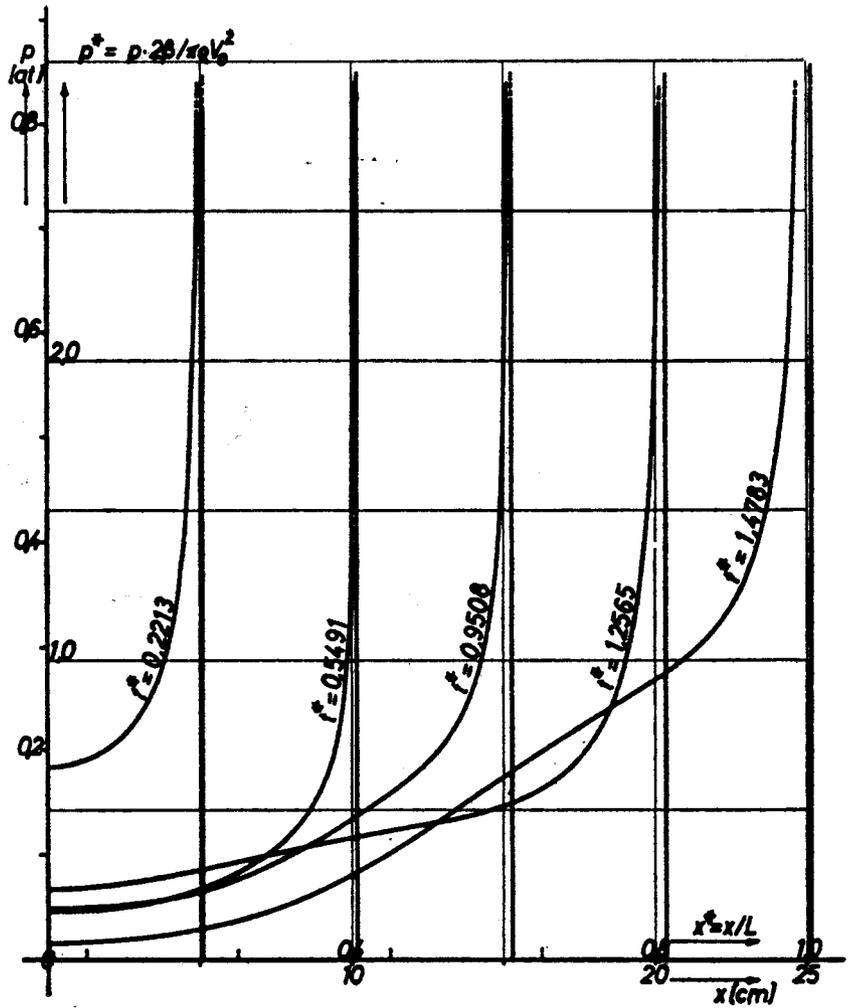


Diagramm 10 Druckverteilungen  $p^*(x^*)$  für das Beispiel 0-0 (Eckmodell)

Standardrechnung nur kleine Fehler für die Rumpfbeschleunigung  $\eta^*$ , die sicher 1 % nicht überschreiten.

Der größte Fehler der Beschleunigung beträgt etwa 0,012. Bezogen auf die größte Beschleunigung von  $\eta^* = 0,830$  beträgt der größte Fehler der Standardrechnung 1,5 %. Man kann behaupten, daß der Rechenaufwand der Standardrechnung ausreichend ist, um innerhalb der theoretischen Voraussetzungen zu genügend genauen Ergebnissen zu kommen.

### C. Ergebnisse der Parametervariationen

Für jedes der berechneten Beispiele 0, 1, 2, 3 und 4 ist folgender Satz von Diagrammen zusammengestellt worden (Diagramme 8 bis 20):

Das erste Diagramm stellt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung des Rumpfes  $\eta^*(t^*)$  dar. Es sind zum Vergleich jedesmal die Beschleunigungen für das starre Modell und für das Vergleichsmodell nach Sydow mit aufgetragen worden. Es wird darauf hingewiesen, daß für das Beispiel 1 des besseren Vergleichs wegen die Beschleunigung im doppelten Maßstab aufgetragen ist.

Das zweite Diagramm enthält den Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für vier Punkte an der Bodenplatte, und zwar für  $x^* = x/L = 0,05$ ;  $0,25$ ;  $0,45$  und  $0,65$ .

Für das Eckmodell 0 sind außerdem folgende drei Diagramme (10, 11 und 12) vorhanden: Im Diagramm 10 sind Druckverteilungen  $p^*(x^*)$  dargestellt für fünf Zeiten  $t^*$ , die

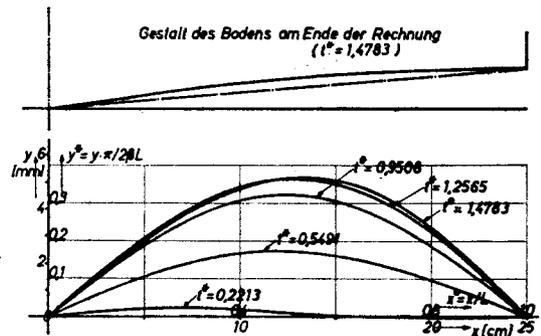


Diagramm 11 Verformungen des Bodens  $y^*(x^*)$  für das Beispiel 0-0 (Eckmodell)

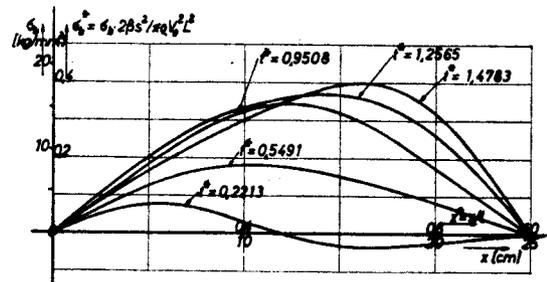


Diagramm 12 Biegespannungen im Boden  $\sigma_b^*(x^*)$  für das Beispiel 0-0 (Eckmodell)

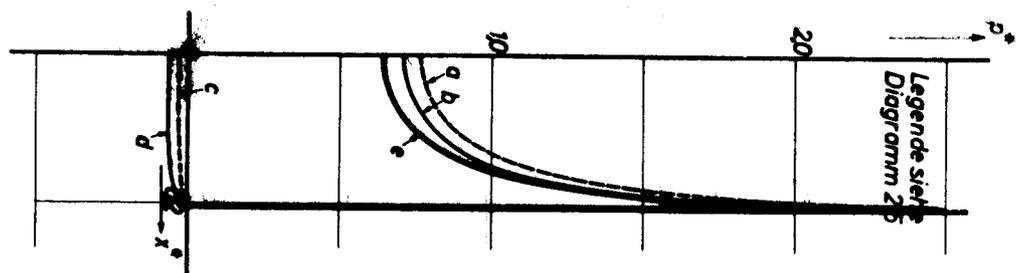


Diagramm 21  
Beispiel 0-0  
Anteil des Drucks  
für  $t^* = 0,2213$

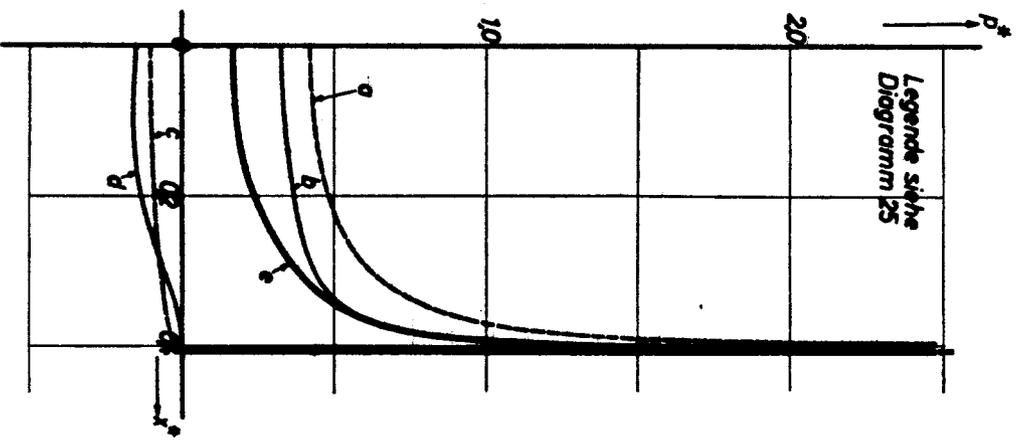


Diagramm 22  
Beispiel 0-0  
Anteil des Drucks  
für  $t^* = 0,5491$

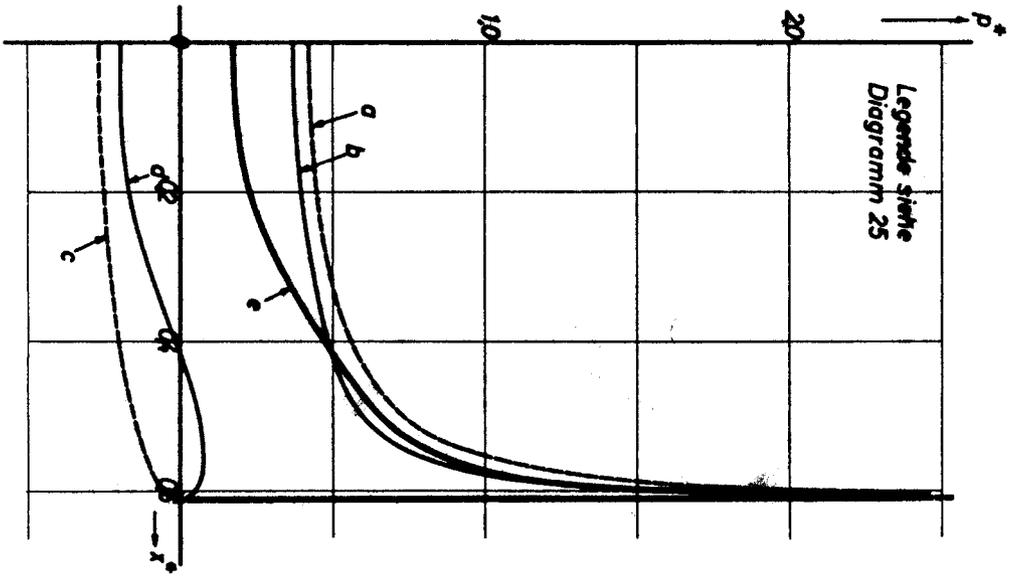


Diagramm 23  
Beispiel 0-0  
Anteil des Drucks  
für  $t^* = 0,9508$

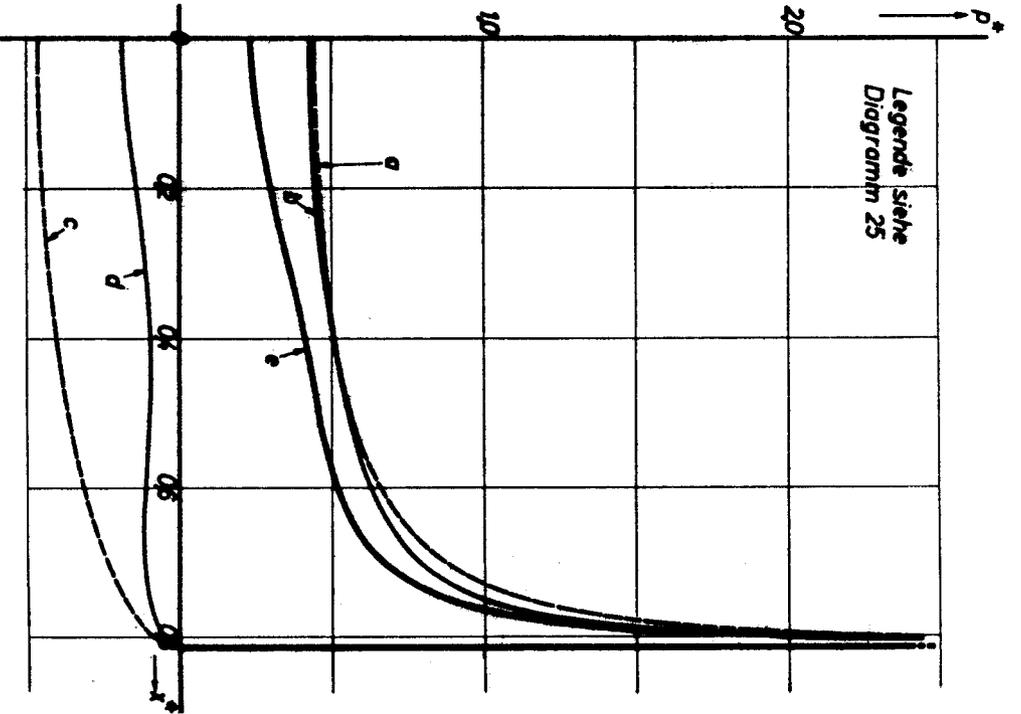


Diagramm 24  
Beispiele 0-0  
Anteil des Drucks für  $t^* = 1,2565$

Legende siehe  
Diagramm 25

Legende siehe  
Diagramm 25

Legende siehe  
Diagramm 25

Legende siehe  
Diagramm 25

den Rechenschritten 16, 32, 48, 64 und 79 entsprechen. Die eingetauchte Breite ist:  $c^* = 0,2037; 0,4074; 0,6112; 0,8149$  bzw.  $1,0059$ . Die letzte dargestellte Druckverteilung gilt also nicht genau für  $c^* = 1$ . An den Kurven ist das zugehörige  $t^*$  angegeben.

Die anderen beiden Diagramme 11 und 12 enthalten die Verformungen der Bodenplatte  $y^*(x^*)$  und die Biegespannungen  $\sigma_b^*(x^*)$  für die gleichen fünf Zeiten wie oben. Im Diagramm 11 ist außerdem maßstäblich die Bodenkontur für das Ende der Rechnung ( $c^* = 1,0059$ ) eingezeichnet für die in Tabelle 1 (Abschnitt IV. A.) angegebenen Modelldaten.

In den Diagrammen ist jeweils auch eine Skala angebracht, die die Breiten, Zeiten, Beschleunigungen, Drücke, Verformungen und Spannungen für die in Tabelle 1 angegebenen Modelldaten anzeigt.

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Anteile des Druckes wurden die Diagramme 21 ÷ 25 aufgestellt. In ihnen ist die Druckverteilung der Kurven des Diagramms 10 (Beispiel 0—0) analysiert worden. Es wurden jeweils folgende fünf Kurven gezeichnet:

- a)  $\dot{\eta}^{*2} / U^* \cdot P'_{c,0}$ : d. i. der instationäre Druck infolge der Geschwindigkeit  $\dot{\eta}^*$ .
- b)  $\dot{\eta}^* / U^* \cdot [\dot{\eta}^* P'_{c,0} - \sum_{m=0}^{10} a_{2m}^* P_{c,2m}]$ : d. i. der instationäre Druck infolge der Geschwindigkeiten ( $\dot{\eta}^* - \dot{y}^*$ ).
- c)  $c^* \dot{\eta}^* P'_0$ : d. i. der instationäre Druck infolge der Beschleunigung  $\dot{\eta}^*$ .
- d)  $c^* [\dot{\eta}^* P'_0 - \sum_{m=0}^{10} b_{2m}^* P'_{2m}]$ : d. i. der instationäre Druck infolge der Beschleunigungen ( $\dot{\eta}^* - \dot{y}^*$ ).
- e)  $p^*$ : d. i. der gesamte instationäre Druck.

Es ist also die Differenz zwischen den Kurven a und b der Druck infolge der Bodengeschwindigkeiten  $\dot{y}^*(x^*, t^*)$ , die Differenz zwischen den Kurven c und d der Druck infolge der Bodenbeschleunigungen  $\dot{y}^*(x^*, t^*)$ .

Für den Vergleich der Parametervariationen wurden noch folgende zwei Diagramme aufgestellt: Im Diagramm 26 sind die Beschleunigungen  $\dot{\eta}^*(t^*)$  für die fünf berechneten Beispiele, im Diagramm 27 sind die Druckkurven  $p^*(0,05, t^*)$  zusammengestellt worden. Zum Vergleich wurde der Druckverlauf für den starren Vergleichsfall 0—W (der identisch

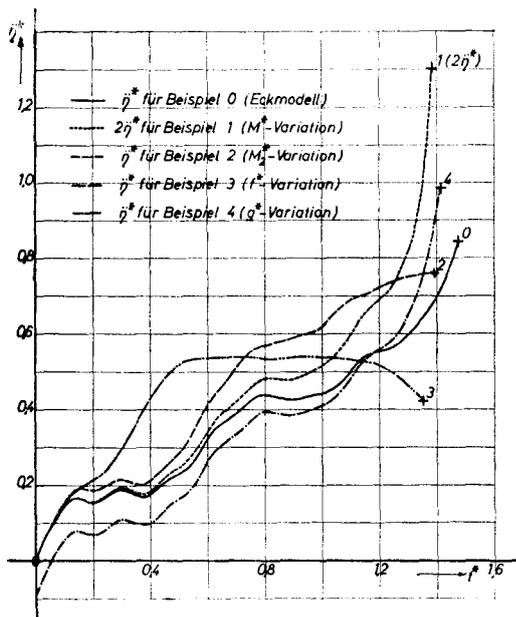


Diagramm 26 Vergleich der Rumpfbeschleunigung  $\dot{\eta}^*(t^*)$  für die fünf berechneten Beispiele

mit den Fällen 2—W und 3—W ist) und für das Vergleichsbeispiel 0—S eingezeichnet. Die Beschleunigung für das Beispiel 1 ist des besseren Vergleichs wegen doppelt so groß dargestellt.

## D. Diskussion des Ergebnisses

### 1. Allgemeine Eigenschaften des hydroelastischen Stoßes

Wir betrachten das Rechenbeispiel 0 (Diagramme 8 bis 12) und ziehen daraus Schlüsse über die allgemeinen Eigenschaften des hydroelastischen Stoßes des speziellen Modellkörpers.

Sehr einleuchtend erscheint die Behauptung, daß durch das elastische Nachgeben des Modells die hydrodynamischen Kräfte verringert werden und damit der Stoß gemildert wird. Aus dem Diagramm 8 geht klar hervor, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß die größte Beschleunigung des Rumpfes beim elastischen Modell wesentlich größer ist als beim starren. Auch für das Sydow-Modell 0—S ist die größte Beschleunigung größer als für den starren Fall 0—W.

Bei dieser Vergrößerung der maximalen Beschleunigung wirken eine Reihe von Einflüssen zusammen:

Zu Beginn des Stoßes wird der elastische Boden sehr stark beschleunigt und gibt nach. Mit der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Verformung des Bodens ist eine Verringerung des Druckes verbunden. Man erkennt dies sehr deutlich aus den Diagrammen 21 und 22. Der Druck infolge  $\dot{y}^*$  und  $\ddot{y}^*$  ist negativ. Den Einfluß von Geschwindigkeit und Verformung auf  $U^*$  und damit auch auf den Druck erkennt man aus dem Diagramm 5. Man ersieht außerdem aus dem Diagramm 27, wie stark der Druck gegenüber dem starren Fall (0—W) reduziert ist. Dieser Druckverringerung entspricht die Verringerung der Beschleunigung  $\dot{\eta}^*$  zu Beginn des Stoßes gegenüber dem starren Fall.

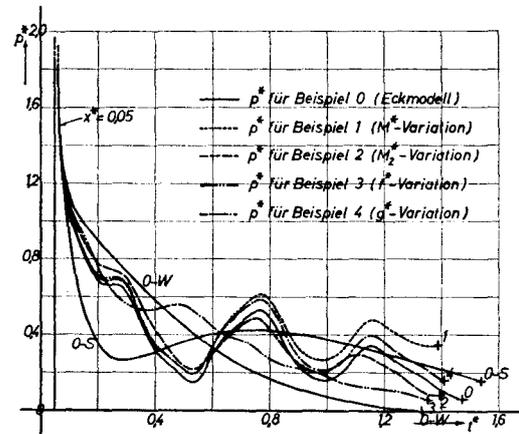


Diagramm 27 Vergleich des Druckverlaufs  $p^*(t^*)$  an der Stelle  $x^* = 0,05$  für die fünf berechneten Beispiele und für die Vergleichsmodelle 0—S und 0—W

Der Stoß ist also zu Beginn tatsächlich gemildert. Dadurch wird aber das Modell weniger stark abgebremst und behält eine größere Geschwindigkeit. Diese größere Geschwindigkeit bedingt aber im weiteren Verlauf des Stoßes größere Kräfte. Dies allein reicht jedoch nicht aus, um das starke Anwachsen der größten Beschleunigung zu erklären.

Zum zweiten ist in dem Beispiel die Erregung der Grundschwingung langsam im Vergleich zur Eigenfrequenz. Die Verformung folgt also schnell der Erregung, und bereits nach dem ersten Drittel des Vorgangs ist die Beschleunigung der Grundschwingung negativ (vgl. Diagramm 4). Kurz vor dem Ende des Vorgangs wird auch die Geschwindigkeit der Grund-

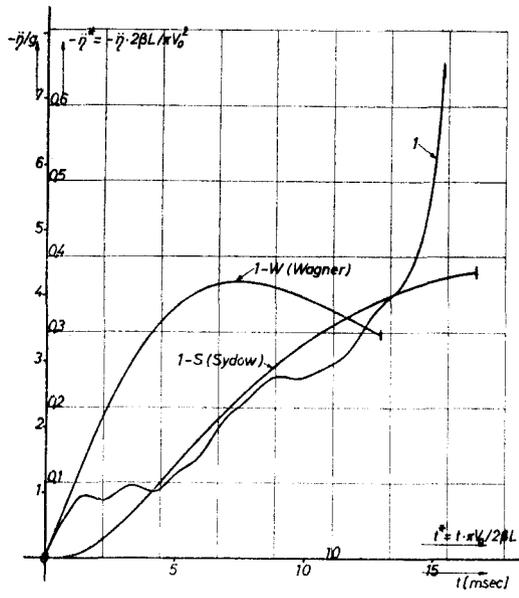


Diagramm 13 Rumpfbeschleunigung  $\eta^*(t^*)$  für das Beispiel 1 ( $M^*$  - Variation)  
 $M^* = 1.9972; M_{2^*} = 0.07996; f^* = 0.8257; g^* = 0$

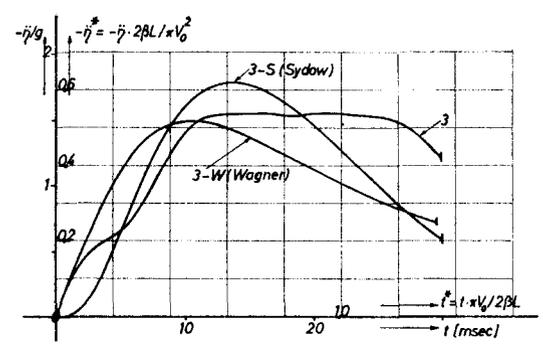


Diagramm 17 Rumpfbeschleunigung  $\eta^*(t^*)$  für das Beispiel 3 ( $f^*$  - Variation)  
 $M^* = 0.9986; M_{2^*} = 0.07996; f^* = 0.8257; g^* = 0$

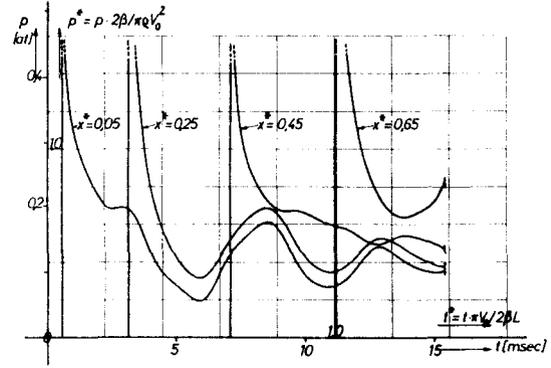


Diagramm 14 Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für das Beispiel 1 ( $M^*$  - Variation)

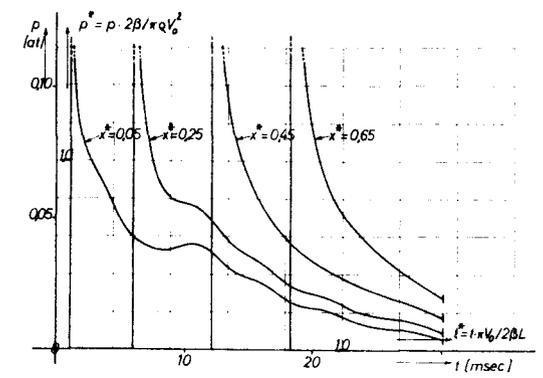


Diagramm 18 Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für das Beispiel 3 ( $f^*$  - Variation)

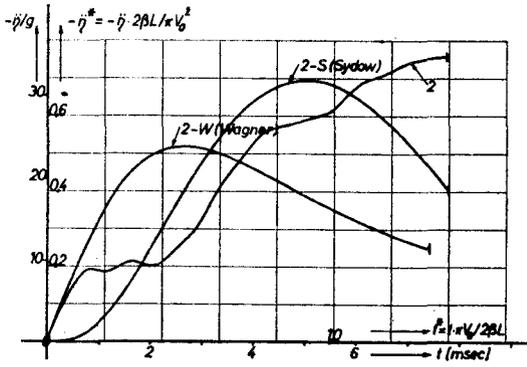


Diagramm 15 Rumpfbeschleunigung  $\eta^*(t^*)$  für das Beispiel 2 ( $M_{2^*}$  - Variation)  
 $M^* = 0.9986; M_{2^*} = 0.15992; f^* = 0.8257; g^* = 0$

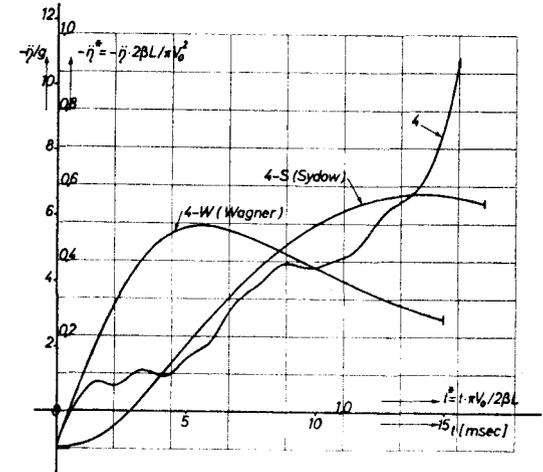


Diagramm 19 Rumpfbeschleunigung  $\eta^*(t^*)$  für das Beispiel 4 ( $g^*$  - Variation)  
 $M^* = 0.9986; M_{2^*} = 0.07996; f^* = 0.8257; g^* = 0.0872$

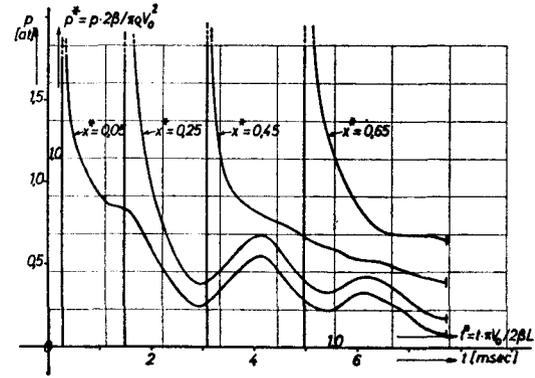


Diagramm 16 Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für das Beispiel 2 ( $M_{2^*}$  - Variation)

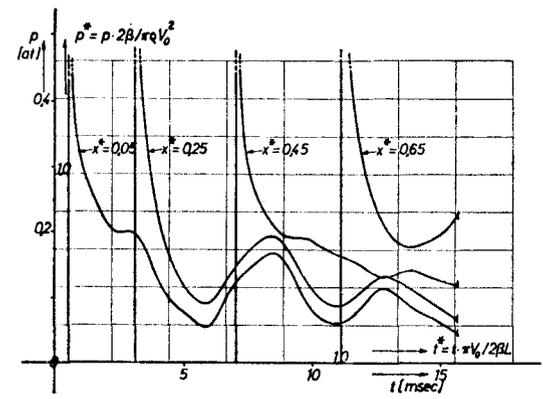


Diagramm 20 Druckverlauf  $p^*(t^*)$  für das Beispiel 4 ( $g^*$  - Variation)

schwingung negativ. Die höheren Schwingungsanteile haben sowieso schneller oszillierende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Bodenplatte federt also zurück. Dies bedeutet, daß der elastische Boden keine weitere Energie aufnimmt, sondern sie wieder abgibt. Dem entspricht, daß in der zweiten Hälfte des Vorgangs der Druck höher ist als im starren Fall (vgl. Diagramm 27 sowie Diagramme 24 und 25).

Dieses Zurückfedern der Bodenplatte fällt zusammen mit der höheren Eintauchgeschwindigkeit infolge der geringeren Abbremsung zu Beginn des Stoßes.

Das Energieaufnahmevermögen des Bodens ließe sich vergrößern durch Senkung der Grundfrequenz des Bodens, also durch Verkleinerung von  $f^*$ . Die Rechnungen von J. Sydow [5] bestätigen diese Überlegung: Für sehr niedrige Federsteifigkeiten ergibt sich im gesamten Stoßverlauf eine Verkleinerung der Rumpfbeschleunigung. Bei dem hier behandelten Modell treten jedoch andere Schwierigkeiten auf. Es werden dann nämlich höhere Eigenschwingungen in der Nähe der Resonanz erregt. Damit ändert sich das Bild völlig. Außerdem werden die Verformungen so groß, daß der Boden stark konkav gekrümmt ist und ein hohles Auftreffen entsteht.

Damit haben wir den dritten Einfluß, der eine Vergrößerung der maximalen Beschleunigung bewirkt. Durch die Verformung des Bodens wird zunächst der Kielungswinkel vergrößert und der Stoß gemildert. Da aber der Boden außen unverschieblich gelagert ist, muß zum Schluß des Stoßes der Kielungswinkel kleiner werden. Man erkennt dies aus dem Verlauf von  $U^*(t^*)$  sowie aus der Bodenkontur im Diagramm 11.

Es wird hier darauf hingewiesen, daß am Schluß der Rechnung der Boden etwa waagrecht verläuft, daß aber diesem Kielungswinkel 0 nicht  $U^* = 0$  entspricht. Dies ist dadurch zu erklären, daß die aufgewölbte freie Oberfläche selbst nicht horizontal ist.

Es bewirkt also auch die Verformung des Bodens ein Anwachsen der Kräfte am Schluß des Vorgangs. Dieser dritte

Einfluß erklärt auch das starke Anwachsen der Beschleunigung  $\ddot{\eta}$  am Schluß des Vorgangs, das bei dem Sydowschen Vergleichskörper nicht auftritt.

Eine Verkleinerung der größten Beschleunigung ist nur möglich, wenn man gleichzeitig das Zurückfedern und die Hohlwölbung des Bodens vermeidet.

Es wäre am besten, eine möglichst konstante Beschleunigung zu erzielen; dann ist das Maximum am kleinsten. Die Kraft müßte dazu zu Beginn sehr stark ansteigen. Das hier behandelte Modell erfüllt diese Bedingung nicht, sondern bewirkt genau das Gegenteil.

Es wird jetzt besprochen, warum die Beschleunigung  $\ddot{\eta}^*(t^*)$  und der Druck  $p^*(t^*)$  bei dem von mir berechneten Modell nicht einen so glatten Verlauf haben wie bei dem starren und bei dem Sydowschen Modell. Dies ist nämlich nicht auf Unvollkommenheiten der numerischen Lösung zurückzuführen, sondern hat seine Ursache in den speziellen Eigenheiten des hydroelastischen Systems.

Es kann gezeigt werden, daß bei der auf Biegung beanspruchten Bodenplatte für die einzelnen Schwingungsgrade das Verhältnis von Erregungsfrequenz zu Eigenfrequenz verschieden ist, und zwar ist das Verhältnis umgekehrt proportional der Ordnung  $n$ . Dies ist bedingt durch die Dissipation der Spannungswellen im Biegestab. Es folgt daraus ein unterschiedliches Beschleunigungsverhalten der einzelnen Schwingungsgrade. Die Beschleunigung des Bodens ist daher in komplizierter Weise von der Vorgeschichte und vom herrschenden Druck abhängig. Es überwiegen stark die niederfrequenten Anteile, während Beschleunigungen sehr hoher Frequenz praktisch nicht vorhanden sind. Diese Überlegungen erklären die sehr gute Konvergenz der Beschleunigungen  $\ddot{y}^*$ .

Zweitens tragen nicht alle Teile des eingetauchten Bodens in gleichem Maße zum Druck bei. Bei der Berechnung der Koeffizienten der Tschebyscheff-Entwicklung werden die äußeren Teile des eingetauchten Teils begünstigt. Außerdem begünstigt die zusätzliche Konvergenz der Druckfunktionen

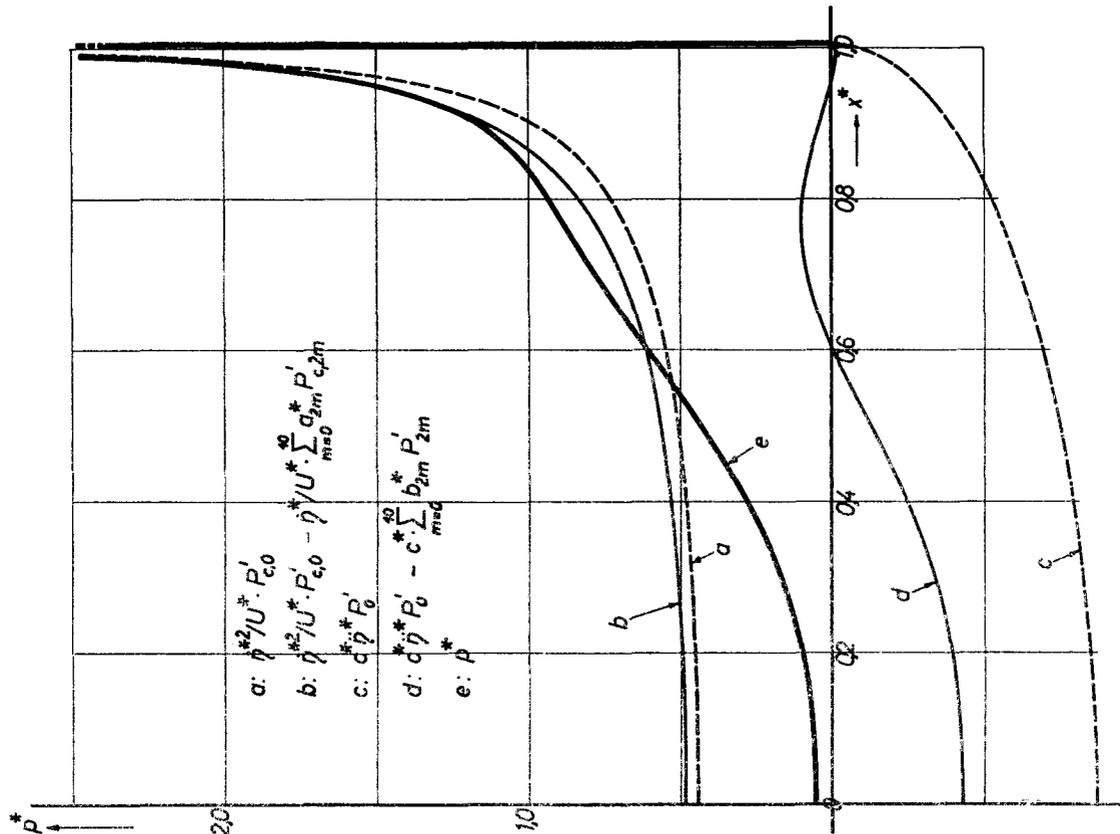


Diagramm 25  
Beispiel 0-0  
Anteile des Drucks für  $t^* = 1,4783$

$P_{2m}$  die Eigenschwingungen mit niedrigerer Knotenzahl im eingetauchten Bereich, wodurch die niedrigen Schwingungsgrade im Druckbild noch stärker hervortreten.

Im Beispiel 0 enthalten Druck und Beschleunigung des Rumpfes starke Anteile durch den ersten und zweiten Schwingungsgrad, während der Einfluß des dritten noch gerade wahrnehmbar ist.

Es läßt sich durch den Vergleich der Diagramme 4 und 9 leicht erkennen, daß die ziemlich regelmäßige Druckschwankung durch den zweiten Schwingungsgrad verursacht wird. Die Frequenz der Druckschwankung entspricht der des zweiten Schwingungsgrades unter Berücksichtigung der hydrodynamischen Massenkräfte. Dadurch ist die Frequenz erheblich kleiner als die Eigenfrequenz im Vakuum.

Diese Druckschwankungen sind deshalb besonders interessant, weil sie sich nur aus der Rechnung für das elastische System mit mehreren Freiheitsgraden ergeben. Durch eine vereinfachte Vergleichsrechnung, z. B. für ein Sydow-Modell, werden die Druckschwankungen unterdrückt (vgl. auch Diagramm 27).

Die Diagramme der Verformungen und Biegespannungen sollen deren zeitlichen Verlauf demonstrieren. Die hinzugefügten Größenangaben beziehen sich auf das Zahlenbeispiel in Tabelle 1. Dieses Beispiel wurde so ausgewählt, daß sich eine Biegespannung von höchstens  $18 \text{ kg/mm}^2$  ergibt. Die größte Durchbiegung beträgt dabei etwa 5 mm. Aus der Ähnlichkeitsbetrachtung wird sofort klar, daß man durch proportionale Änderung von  $\beta$  und  $V_0$  jede gewünschte Biegespannung bzw. Verformung für einen Modellversuch bekommt.

Die Beschleunigungsdrücke sind proportional einer charakteristischen Länge, im vorliegenden Fall sind sie proportional der eingetauchten Breite. Deswegen nimmt der Einfluß der Beschleunigungen dauernd zu. Dagegen sind die geschwindigkeitsbedingten instationären Drücke proportional der Änderung der eingetauchten Breite, die etwa gleichbleibend ist. Dadurch ist der Einfluß der Geschwindigkeiten auf den Druck immer etwa gleich groß. Man erkennt diese beiden Tendenzen deutlich in den Diagrammen 21 bis 25.

## 2. Einfluß der vier dimensionslosen Kenngrößen

### Einfluß von $M^*$ (Beispiel 1):

Durch die Verdoppelung von  $M^*$  im Beispiel 1 gegenüber dem Eckmodell 0 wird die Beschleunigung  $\ddot{\eta}^*$  etwa halbiert. Zum besseren Vergleich mit den übrigen Beispielen wurde  $\ddot{\eta}^*$  hier im doppelten Maßstab gezeichnet. Man erkennt aus dem Diagramm 26, daß die doppelte Beschleunigung für das Beispiel 1 nicht wesentlich von der für das Beispiel 0 abweicht. Wie zu erwarten ist, behält das Modell infolge der größeren Masse eine höhere Geschwindigkeit. Dadurch sind die Drücke, Verformungen und Biegespannungen größer als beim Eckmodell 0. Die größte Durchbiegung steigt auf etwa 7 mm, die größte Biegespannung auf  $23 \text{ kg/mm}^2$ . Im übrigen zeigen die Beschleunigung  $\ddot{\eta}^*(t^*)$  und der Druck  $p^*(t^*)$  den gleichen typischen Verlauf wie beim Eckmodell. Infolge der geringeren Verzögerung ist der Stoß früher beendet.

### Einfluß von $M_2^*$ (Beispiel 2):

Durch die Verdoppelung von  $M_2^*$  im Beispiel 2 gegenüber dem Eckmodell werden die hydrodynamischen Massenkräfte im Verhältnis zur Masse der Bodenplatte halbiert. Das bedeutet, daß die hydroelastischen Einflüsse auf den Stoß etwa halbiert werden. Die Kurve  $\ddot{\eta}^*(t^*)$  für das Beispiel 2 liegt etwa auf der Mitte zwischen dem Beispiel 0 und dem starren Modell  $0-W \equiv 2-W$ . Die Verformungen  $y^*$  sind etwa halbiert. Die größte Verformung beträgt 2,9 mm. Die Biegespan-

nungen sind etwa gleich groß ( $19 \text{ kg/mm}^2$ ). Der Druck  $p^*(t^*)$  zeigt die gleichen typischen Druckschwankungen, allerdings mit etwa halb so großer Amplitude. Die Frequenz der Druckschwankungen ist etwas größer als im Beispiel 0. Dies hat seinen Grund darin, daß die hydrodynamische Masse im Verhältnis zur Bodenmasse halbiert ist.

### Einfluß von $f^*$ (Beispiel 3):

Durch die Verdoppelung der Kenngröße  $f^*$  im Beispiel 3 gegenüber dem Eckmodell 0 ist das Verhältnis der Erregungsfrequenzen zu den Eigenfrequenzen nur noch halb so groß. Daraus folgt, daß die Bodenplatte in höherem Maße statisch beansprucht wird. Das zeigt sich in allen Ergebnissen. Die Beschleunigung  $\ddot{\eta}^*(t^*)$  nähert sich sehr dem starren Fall, die Druckschwankungen sind wesentlich weniger ausgeprägt. Die größten Verformungen und Biegespannungen sind früher erreicht und sind kleiner als im Beispiel 0.

Im Rahmen der Voraussetzung dieser Untersuchung ist eine wesentliche Verkleinerung der Kenngröße  $f^*$  gegenüber dem Eckmodell 0 nicht möglich, weil dann ein hohler Stoß eintritt.

### Einfluß von $g^*$ (Beispiel 4):

Wegen der niedrigen Auftreffgeschwindigkeit  $V_0$  im Beispiel 0 ist der Einfluß der Erdbeschleunigung ziemlich groß ( $g^* = 0,0872$ ). Für das Beispiel 2 wäre  $g^*$  nur halb so groß. Für eine Großausführung des Beispiels 0 mit einer Breite von  $2L = 5 \text{ m}$  wäre  $g^* = 0,872$ . Bei der Großausführung ist der Einfluß der Erdbeschleunigung immer sehr wichtig.

Die Wirkung der Erdbeschleunigung ist ähnlich wie die einer größeren Rumpfmasse. Beide bewirken im späteren Verlauf des Stoßes eine höhere Geschwindigkeit, wodurch alle Kräfte vergrößert werden. Die wesentlichen Eigenschaften der Kurven bleiben aber genau wie beim Beispiel 1 erhalten.

## E. Betrachtung der Kompressibilität

Aus der Arbeit von R. Skalak und D. Feit [7] geht hervor, daß die Kenngröße, die den Einfluß der Kompressibilität charakterisiert, die Machsche Kennzahl ist, die mit der Geschwindigkeit der Spritzerwurzel  $\dot{c}$  gebildet ist. Solange diese Machsche Kennzahl kleiner ist als 0,25, läßt sich die Kompressibilität vernachlässigen.

Man kann folgenden Zusammenhang zwischen der Machzahl  $M_0$  und den Kennzahlen  $M_2^*$  und  $f^*$  aufstellen:

$$M_0 = \frac{V_0}{U \cdot c_s} = \frac{\pi^2 \rho}{8 \rho_B c_s} \sqrt{\frac{E}{12 \rho_B}} \frac{M_2^*}{f^*}$$

Es ist  $c_s$  die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit. Der Faktor  $\pi^2 \rho / 8 \rho_B c_s \cdot \sqrt{E / 12 \rho_B}$  ist eine Konstante, wenn es sich um die gleiche Flüssigkeit und um Modelle aus dem gleichen Material handelt.

Die Machsche Kennzahl und damit der Einfluß der Kompressibilität lassen sich ändern, wenn man  $M_2^*$  oder  $f^*$  oder beide Kenngrößen verändert. Eine Verkleinerung von  $f^*$  bewirkt eine Vergrößerung von  $M_0$ . Das würde aber bedeuten, daß gleichzeitig der Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit und der Einfluß der Kompressibilität vergrößert werden. Dagegen bewirkt eine Vergrößerung von  $M_2^*$  eine Vergrößerung von  $M_0$ . Dadurch wird auch der Einfluß der Kompressibilität vergrößert. Der Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit wird jedoch kleiner.

Es sind also Beispiele denkbar, bei denen der Einfluß der Elastizität klein, der Einfluß der Kompressibilität dagegen groß ist. Diese Beispiele sind durch großes  $M_2^*$  ausgezeich-

net, d. h. sie haben eine dicke Bodenplatte und kleine Stützenabstände. Bei Schiffen ist das Dickenverhältnis  $s/L$  der Bodenplatten meistens klein, so daß aus dieser Überlegung folgt, daß man die elastische Nachgiebigkeit in keinem Falle vernachlässigen kann.

Die Untersuchung von Modellen, die an der Grenze  $M_0 = 0,25$  liegen, wo gerade noch die Kompressibilität vernachlässigbar ist, war nicht das Ziel dieser Arbeit. Es läßt sich das erstellte Programm für solche Betrachtungen verwenden.

### Zusammenfassung

1. Es wurde durch den Vergleich der Lösungen, die man mit dem Ansatz von H. Wagner für einen starren Keilkörper mit konstanter Geschwindigkeit erhält, mit den Lösungen von J. Pierson für die exakte Randbedingung an der freien Oberfläche gezeigt, daß das von H. Wagner benutzte Ersatzsystem eine gute Gesamtbilanz der Kräfte liefert. — Nur der Energieverlust kann damit nicht erklärt werden. — Es wurde außerdem plausibel gemacht, daß eine Erweiterung des Ansatzes auf elastische Systeme solange vertretbar ist, wie keine hohen Anforderungen an Einzelheiten der Druckverteilung, insbesondere im Bereich der Spritzerwurzel, gestellt werden.

Infolge der sehr guten Konvergenz der Reihen für die Verformung, Geschwindigkeit und Beschleunigung brauchten in den Rechnungen höchstens die ersten drei Schwingungsgrade berücksichtigt zu werden. Die dafür erforderlichen Integrale über die Druckverteilung stellen tatsächlich keine hohen Forderungen an die Form der Druckverteilung. Die Druckverteilung für das Ersatzsystem liefert hierfür genügend genaue Information. Der erweiterte Ansatz erfaßt also die Kräfte für das hydroelastische Problem im wesentlichen richtig.

2. Es konnte weiterhin gezeigt werden, daß das benutzte Verfahren zur numerischen Lösung der Gleichungen bei dem gewählten Rechenaufwand genügend genaue Ergebnisse liefert. Die Ergebnisse der Rechnung sind also im Rahmen des Ansatzes für kleine Kielungswinkel für das hier behandelte spezielle Modell zutreffend.

3. Die Rechnung liefert folgendes allgemeines Ergebnis:

Durch die Einführung eines elastischen Bodens werden die Drücke am Boden und die Beschleunigungen des Rumpfes zu Beginn des Stoßes verringert. Sie werden jedoch im späteren Verlauf des Stoßes größer als für einen vergleichbaren starren Körper. Dadurch wird die größte Rumpfbeschleunigung größer als für den vergleichbaren starren Körper.

Diese Wirkung kann bei dem hier behandelten Modell nicht vermieden werden.

Die Vergrößerung der Kräfte gegenüber dem starren Modell ist nur zu verhindern, wenn alle Eigenfrequenzen des elastischen Bodens sehr langsam sind im Vergleich zur Erregung.

Außerdem verringert eine Dämpfung das Anwachsen der Kräfte.

Schließlich läßt sich die Vergrößerung der Kräfte nur verhindern, wenn man erreicht, daß der Boden durch die Verformungen nicht hohl wird.

4. Durch den elastischen Boden wird der Druckverlauf wesentlich stärker beeinflusst als die Beschleunigung des Rumpfes.

5. Der hydroelastische Stoß des speziellen Modells wird durch drei Kennzahlen charakterisiert, von denen zwei die Newtonsche Ähnlichkeit für den starren und elastischen Teil sicherstellen, während die dritte Kennzahl die Cauchysche Ähnlichkeit beschreibt.

Bei Modellversuchen ist der Einfluß der Erdbeschleunigung (Froudesche Ähnlichkeit) praktisch zu vernachlässigen. Bei Großausführungen ist dies nicht möglich.

6. Die drei Kenngrößen beeinflussen den Stoß in folgender Weise:

- a) Die Art der hydroelastischen Wechselwirkungen wird im wesentlichen bestimmt durch die Cauchy-Kennzahl  $f^*$ . Mit einem  $f^*$ -Wert ist stets ein bestimmter Typ der Kurven  $\dot{\eta}^*(t^*)$  und  $p^*(t^*)$  verbunden. Eine Verkleinerung von  $f^*$  bewirkt eine Vergrößerung der hydroelastischen Effekte und umgekehrt.
- b) Die Größe der hydroelastischen Kräfte wird bestimmt durch die Massenkennzahl  $M_2^*$ , die das Verhältnis der Masse des elastischen Teils des Modells zur charakteristischen Masse angibt. Eine Verkleinerung von  $M_2^*$  bewirkt eine Vergrößerung der hydroelastischen Effekte und umgekehrt.
- c) Die Massenkennzahl  $M^*$  für die Gesamtmasse des Modells hat nur indirekten Einfluß auf das hydroelastische Verhalten.  $M^*$  ist ein Maß für die Verzögerung des gesamten Modells. Ist  $M^*$  groß, so wird das Modell wenig abgebremst. Wird das Modell wenig gebremst durch den Stoß, so sind die hydrodynamischen Kräfte überhaupt groß und damit auch die hydroelastischen Effekte.

Eine ähnliche Wirkung wie ein großes  $M^*$  hat auch eine große dimensionslose Erdbeschleunigung  $g^*$  (das ist gleichbedeutend mit einer kleinen Froudeschen Kennzahl). Bei Großausführungen ist daher der Einfluß des elastischen Bodens größer als bei kleinen Modellen.

7. Für  $M_2^* = 0,07996$  ist  $f^* = 0,8257$  ungefähr der kleinste im Rahmen des Ansatzes zulässige  $f^*$ -Wert (Beispiel 0). Es lassen sich auch kleinere  $f^*$ -Werte behandeln, wenn  $M_2^*$  genügend groß gemacht wird.

8. Näherungsrechnungen mit einfachen Vergleichsmodellen sind nur dann sinnvoll, wenn das vereinfachte Modell die wesentlichen Eigenschaften des Problems enthält. So ist die Beschleunigung des Rumpfes für das Vergleichsmodell nach J. Sydow in ziemlich guter Übereinstimmung mit der Beschleunigung für das hier behandelte Modell. Der Grund liegt darin, daß bei den gewählten  $f^*$ -Werten die Rumpfbeschleunigung hauptsächlich durch die Grundschiwingung des Bodens beeinflusst wird. Dagegen ist die Übereinstimmung für den Druckverlauf unbefriedigend, weil hier wesentliche Anteile vom zweiten Schwingungsgrad herrühren.

Für das Beispiel 3 liefert sogar das starre Modell schon eine gute Näherung.

Denkt man sich Beispiele mit kleinerem  $f^*$ , so ist sicher auch für die Rumpfbeschleunigung die Übereinstimmung mit dem Vergleichsmodell nach J. Sydow unbefriedigend.

9. Für Modelle mit dünnen Bodenplatten und großem Stützenabstand spielt die Kompressibilität gegenüber den elastischen Verformungen eine untergeordnete Rolle.

### Nachwort

Es war das Ziel dieser Arbeit, einen Ansatz zur Berechnung hydroelastischer Stöße zu entwickeln und daraus die wichtigsten Eigenschaften des hydroelastischen Stoßes abzuleiten. Der Ansatz wurde hier dargestellt. Außerdem wurden Beispiele für einen speziellen Modelltyp berechnet, aus denen wesentliche Eigenschaften des hydroelastischen Stoßes gefolgert werden können.

Der Ansatz enthält als Sonderfall das von J. Sydow behandelte Problem. Die theoretischen Ergebnisse von J. Sydow zeigen gute Übereinstimmung mit dessen Messungen.

Eine experimentelle Nachprüfung der Ergebnisse dieser Messungen ist geplant.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Bundesministerium für Verteidigung, die durch ihre freundliche Unterstützung diese Untersuchungen ermöglichten. Besonderer Dank sei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Weinblum ausgesprochen, der den Verfasser auf dieses Problem brachte und durch sein Vertrauen in das Gelingen wesentlich zum Abschluß der Untersuchung beigetragen hat. Schließlich sei Frau Dr.-Ing. M. Kirsch gedankt, die beim Korrekturlesen behilflich war.

(Eingegangen am 18. August 1964)

### Berichtigung

Beim ersten Teil dieser Arbeit in Schiffstechnik Band 12, 60. Heft, sind noch folgende Berichtigungen vorzunehmen.

Seite 23, linke Spalte, 3. Zeile: es muß heißen  $\int$  statt  $\oint$

Seite 24, rechte Spalte, Gleichung (27):  
es muß heißen  $-\rho c$  statt  $-\rho c$

Seite 25, rechte Spalte, 3. Zeile von unten:  
es muß heißen  $Y_n(x)$  statt  $V_n(x)$

Seite 27, rechte Spalte, 12. Zeile von unten:  
es muß heißen  $c(t)$  statt  $e(t)$

Seite 28, linke Spalte, in der letzten Gleichung vor Kapitel 3:  
es muß heißen  $\sum K(t)$  statt  $K(t)$

Seite 29, linke Spalte, 15. Zeile: es muß heißen  $V_n$  statt  $v_n$

### Nomenklatur

siehe Schiffstechnik, Band 12, 60. Heft, Seite 28—30

### Schrifttum

- [1] Th. v. K a r m a n und F. L. W a t t e n d o r f : The Impact on Seaplane Floats during Landing. NACA TN 321, 1929.
- [2] H. W a g n e r : Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. Zeitschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik 12, 1932, S. 193—215.

- [3] W. P a b s t : Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen. Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 21, 1930, S. 217—226.
- [4] W. P a b s t : Über den Landestoß von Seeflugzeugen. Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 22, 1931, S. 13—18.
- [5] J. S y d o w : Über den Einfluß von Federung und Kielung auf den Landestoß. DVL-Jahrbuch 1938, S. 329—338.
- [6] F. W e i n i g : Berücksichtigung der Elastizität beim Aufschlag eines gekielten Flugzeugschwimmers aufs Wasser (Ebenes Problem). Luftfahrt-Forschung 13, 1936, S. 155—159.
- [7] R. S k a l a k und D. F e i t : Impact on the Surface of a Compressible Fluid. Columbia University, New York, Dept. of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Jan. 1963.
- [8] J. D. P i e r s o n : The Penetration of a Fluid Surface by a Wedge. Institute of the Aeronautical Sciences, New York, S. M. F. Fund Paper No. FF-3, 1950.
- [9] R. L. B i s p l i n g h o f f und C. S. D o h e r t y : Some Studies of the Impact of Vee-Wedges on a Water Surface. J. Fr. Inst. 253, 1952, S. 547—561.
- [10] R. G. M o n a g h a n : A Theoretical Examination of the Effect of Deadrise on Wetted Area and Associated Mass in Seaplane-Water Impact. Aeronautical Research Council, London, Reports and Memoranda No. 2681, 1952.
- [11] A. G. F a b u l a : Ellipse Fitting Approximation of Two-Dimensional Normal Symmetric Impact of Rigid Bodies on Water. Proc. of the 5th Mid-Western Conf. on Fluid Mechanics, 1957, S. 299—315.
- [12] W. S c h m e i d l e r : Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, I. Lineare Integralgleichungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- [13] H. G l a u e r t : The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge University Press, 1948.
- [14] W. E. C u m m i n s : The Force and Moment on a Body in a Time-Varying Flow. Journal of Ship Research, April 1957, S. 7.
- [15] O. G r i m : Über den Einfluß der mitschwingenden Wassermasse auf die Schwingungseigenschaften lokaler schwingungsfähiger Systeme. Schiff und Hafen, 1953, S. 538.
- [16] H o h e n e m s e r und P r a g e r : Dynamik der Stabwerke. Verlag Julius Springer, Berlin, 1953.
- [17] J a h n k e - E m d e - L ö s c h : Tafeln höherer Funktionen. 6. Auflage, 1960. Verlag B. G. Teubner, Stuttgart.

## SCHIFFSTECHNIK

### Forschungshefte für Schiffbau und Schiffsmaschinenbau

Verlag: Schiffsverkehrs-Verlag „Hansa“ C. Schroedter & Co., Hamburg 11, Stubbenhuk 10. Tel. Sa.-Nr. 36 49 81. — Schriftleitung: Prof. Dr.-Ing. Kurt Wendel, Hamburg. — Alle Zuschriften sind an den obigen Verlag zu richten. — Unaufgefordert eingesandte Manuskripte werden nur auf ausdrücklichen Wunsch zurückgesandt. — Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des Verlages. — Einzelpreis DM 7,50; Jahres-Abonnement DM 32,50 zuzüglich Postzustellgebühr, Abonnements-Kündigungen müssen bis spätestens einen Monat vor Ablauf des Jahres-Abonnements beim Verlag vorliegen. — Anzeigenleitung: Irmgard Dahl, Hamburg. — Anzeigenpreisliste Nr. 2. — Bankkonto: Vereinsbank, Abteilung Hafen. — Postscheckkonto: Hamburg Nr. 141 87 Höhere Gewalt entbindet den Verlag von jeder Lieferungsverpflichtung. — Erfüllungsort und Gerichtsstand Hamburg. Druck: Schroedter & Hauer, Hamburg 1.