83 | 1961

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Wieghardt

Überblick über die Strömungslehre

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Überblick über die Strömungslehre

K. Wieghardt , Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1961

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

NAT 510

VW: —

SW: —

IfS-Bericht No 83 a

Überblick über die Strömungslehre

Prof. Dr. K. Wieghardt,

Institut für Schiffbau, Hamburg

Das Thema der Strömungslehre sind die Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen. Zu ihrer Beschreibung abstrahiert man das Strömungsmedium und ersetzt die wirkliche Flüssigkeit oder das Gas durch ein phänomenologisches Modellmedium, dem man nur gerade soviel physikalische Eigenschaften zuordnet, daß damit die wichtigsten, beobachteten mechanischen Beziehungen zwischen den Kräften und der Bewegung wiedergegeben werden können.

Man kann sich nun einen, wenn auch oberflächlichen Überblick über die Probleme der Strömungslehre verschaffen, indem man diese Modellmedien der Reihe nach betrachtet.

Zunächst ersetzt man die wirklichen Medien durch ein isotropes Kontinuum, was offenbar solange statthaft ist, als die Abmessungen der betrachteten Strömung groß gegen die Molekülabstände sind. Um Dynamik treiben zu können, muß dem Kontinuum eine träge Masse zugeschrieben werden, d. h. also eine Dichte ϱ = Masse pro Volumeneinheit. Das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Flüssigkeit und Gas ist offenbar die Kompressibilität; Flüssigkeiten sind fast inkompressibel, so daß man für sie $\varrho = \text{const.}$ setzen kann. Die nächsteinfache Annahme zur Darstellung eines Gases ist $\varrho = \varrho(p)$, d. h. zwischen Druck p und Dichte ϱ besteht ein eindeutiger Zusammenhang.

Gegenüber dem festen Aggregatzustand unterscheiden sich Flüssigkeiten und Gase durch die leichte Verschiebbarkeit ihrer Teilchen gegeneinander. Deformierende Kräfte rufen in einem festen Körper innere Spannungen hervor, die mit den angreifenden Kräften gerade im Gleichgewicht stehen, und die Formänderung des Körpers bleibt klein, verglichen mit dem Anfangszustand. So wird z. B. bei Schubbeanspruchung die Formänderung des festen Körpers durch einen kleinen Winkel γ, die sog. Schiebung beschrieben. Für ideal elastische Körper gilt dabei das Hooke'sche Gesetz: Schub $\tau = G \cdot \gamma$ mit G = Gleitmodul als Materialkonstante.

In einer Flüssigkeit wächst bei Schubbeanspruchung die Formänderung γ mit der Zeit t beliebig an; statisches Gleichgewicht ist gar nicht möglich in diesem Belastungsfall. Worauf es hier ankommt, ist die Formänderungsgeschwindigkeit $\partial\gamma/\partial t$ oder $\partial u/\partial y$ (u = Geschwindigkeit in x-Richtung), und man kann in der Tat für die meisten Flüssigkeiten analog zum Hooke'schen Gesetz für feste Körper hier nach Newton ansetzen: $\tau = \mu\, \partial u/\partial y$, mit μ = Zähigkeit. Insbesondere werden danach für hinreichend langsame Formänderungen die Schubspannungen beliebig klein; d. h. in dieser ruhenden Flüssigkeit gibt es gar keine Schubspannungen, sondern der Spannungszustand ist durch den örtlichen Normaldruck p allein bestimmt, der außerdem nach allen Richtungen gleich groß ist.

Die räumliche Verallgemeinerung der obigen Ansätze für einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungstensor σ_{ik} und Deformationstensor ε_{ik} lautet für kompressible, elastische, feste Körper

$$\sigma_{ik} = 2\,\mu_E\, \varepsilon_{ik} + \lambda_E\, \delta_{ik} \sum \varepsilon_{ee},$$

mit μ_E und λ_E = Lamé'sche Konstanten, $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$

und $\sum \varepsilon_{ee}$ = kubische Dilation.

Die Übertragung auf Newton'sche Flüssigkeiten ergibt

$$\sigma_{ik} = 2\mu\, \dot{\varepsilon}_{ik} + \lambda\, \delta_{ik} \sum \dot{\varepsilon}_{ee} - \delta_{ik}\, p,$$

mit p = stat. Druck, unter dem die Flüssigkeit oder das Gas steht, bevor die Bewegung einsetzt. $\dot{\varepsilon}_{ik}$ bedeuten Formänderungsgeschwindigkeiten wie zum Beispiel $\dot{\varepsilon}_{xx} = \partial u/\partial x$, $\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)$; und statt $\sum \dot{\varepsilon}_{ee}$ kann man hier auch div $\mathfrak{v}$ schreiben, mit $\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeitsvektor (Komponenten u, v, w in x, y, z-Richtung); dieses Glied fällt für inkompressible Flüssigkeiten fort, und es bleibt dann nur die Zähigkeit μ als Materialkonstante. Bei Gasen tritt jedoch als zweite Materialkonstante noch die Volumenzähigkeit λ hinzu.

Bei festen Körpern wird man vermuten, daß der obige lineare Ansatz auch für nicht-elastisches Material noch näherungsweise gilt, wenn nur die Dehnungen und Schiebungen klein bleiben, etwa von der Größenordnung 10^{-3}. Bei Flüssigkeiten oder Gasen kann man jedoch nicht von einer „kleinen" Schergeschwindigkeit $\partial u/\partial y$ sprechen, da die $\dot{\varepsilon}_{ik}$ die Dimension 1/Zeit haben. Man kann hier nur fragen, wann die durch die Bewegung geweckten Anteile der Flüssigkeitsspannungen σ_{ik} noch klein bleiben gegen den Ruhedruck p, wann also z. B.

$$\frac{\mu\, \partial u/\partial y}{p} \ll 1$$ gilt (vgl. C. A. Truesdell, ZAMP 3, 1952, S. 79)

Das ist bei Wasser mit p = Barometerdruck = 10^4 kp/m² und $\mu \sim 10^{-4}$ kps/m² für alle wirklichen Strömungen durchaus der Fall, und ebenso für Luft mit $\mu \approx 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ kps/m², außer bei extrem kleinen Luftdrucken wie etwa in sehr großen Höhen; solche stark verdünnten Gase kann man aber sowieso nicht mehr als Kontinuum darstellen.

Natürlich gibt es noch viele andere Stoffe und entsprechende Modellmedien zwischen dem festen Körper und der Newton'schen Flüssigkeit; so z. B. plastische Massen, die sich elastisch verhalten bei geringen Beanspruchungen und erst dann anfangen zu fließen, wenn die Schubspannung örtlich einen Mindestwert überschreitet. Das Verhalten solcher Stoffe, insbesondere der anomalen, nicht-Newton'schen Flüssigkeiten ist das Thema der Rheologie oder Fließkunde. Es handelt sich dabei oft um Dispersionen, denen man zwar im Alltag begegnet, ohne jedoch an Strömungslehre zu denken, wie z. B. um Kondensmilch, Zahnpasta, Schlammwasser, aber auch Blut. Unser Blut ist ja eine Suspension von Blutkörperchen im Blutplasma, die in den feinsten Kapillaren ebenso groß sind wie der „Rohrdurchmesser"; der Blutkreislauf ist physikalisch gesehen eine sehr komplizierte Rohrströmung mit nachgiebigen Rohrwänden und veränderlichem Medium.

Unter anderem befaßt sich die Rheologie auch mit Modellmedien für Stoffe, denen Maxwell eine Relaxationszeit für das Abklingen der inneren Spannungen zuordnete. So verhalten sich z. B. Asphalt oder Eis wie feste, oder gar spröde Stoffe gegen kurzzeitige Belastung (Hammerschlag) und wie Flüssigkeiten bei dauernder Belastung (Auslaufen von Asphalt aus einer Tonne, Fließen eines Gletschers). Die Begriffe fest oder flüssig hängen dann von der Versuchszeit ab.

Teilt man so die Stoffe nach dem Widerstand ein, den sie gegen Formänderungen ausüben, so hat man als ideelles Extrem den starren Körper, der von endlichen Kräften überhaupt nicht deformiert wird. Das andere Extrem ist eine Flüssigkeit, die auch beliebig schnellen Schergeschwindigkeiten keinen Widerstand entgegensetzt ($\mu = 0$); das ist offenbar der Superlativ von flüssig. Ist dieses hypothetische Medium auch noch inkompressibel, so nennt man es ideale Flüssigkeit.

Der Newton'sche Zähigkeitsansatz bewährt sich auch für alle Gase und läßt sich für diese auch gaskinetisch begründen. Da das Wort ideales Gas in der Thermodynamik bereits gebraucht wird, spricht man hier vom reibungslosen Gas, wenn $\mu = 0$ gilt.

Den zähen Flüssigkeiten haben wir jetzt zwei physikalische Eigenschaften zugeordnet: Dichte und Zähigkeit. Rein dimensionsanalytisch können wir daraus schon auf einen charakteristischen dimensionslosen Parameter schließen: wenn zwei Strömungen bei geometrisch ähnlichen Randbedingungen auch mechanisch gleich sein sollen, wie z. B. die Strömung um ein Modell und der Großausführung, so muß überall das Verhältnis von Trägheitskräften zu resultierenden Zähigkeitskräften gleich sein. Das führt bekanntlich auf die Bedingung gleicher Re-Zahl $Re = \varrho U L/\mu$, wobei U eine charakteristische Geschwindigkeit und L eine charakteristische Länge der Strömung ist. Schreibt man die Navier-Stokes-Grundgleichungen, also im wesentlichen Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung angewandt auf ein flüssiges Kontinuum, dimensionslos, so tritt die Re-Zahl als Parameter der Differentialgleichung auf.

In idealer Flüssigkeit gibt es keine solche Zahl; die zugehörigen Grundgleichungen, die Euler-Gleichungen, sind parameterfrei. Erst bei Strömungen, in denen die Schwerkraft eine Rolle spielt, tritt hier ein wesentlicher Parameter auf: die Froude'sche Zahl; das ist die Wurzel aus dem Verhältnis der Trägheit-/Schwerekräfte $Fr = U / \sqrt{gl}$, g = Erdbeschleunigung. So hängt z. B. das Wellensystem, das ein Schiff auf sonst glatter See aufwirft, von dieser Zahl wesentlich ab. Da jedoch wirkliches Wasser — wie jede wirkliche Flüssigkeit — eine gewisse Zähigkeit hat, ist aber auch gleichzeitig die Re-Zahl zu berücksichtigen, wenn man etwa die Strömung um ein Schiff mit einem kleinen Modell nachahmen will. Streng berechnen kann man z. B. den Schiffswiderstand sowieso nicht, aber nicht einmal die Ähnlichkeitsregeln kann man im Modellversuch streng erfüllen! Hat man nämlich z. B. den Modellmaßstab 1 : 25 gewählt und als Modellgeschwindigkeit 1/5 der des Schiffes, so ist zwar die Froude'sche Zahl im Versuch dieselbe wie am Schiff, aber die Re-Zahl ist um den Faktor 125 zu klein. Überhaupt kann man selbst in den größten Wind- und Wasserkanälen nur Re-Zahlen der Größenordnung 10^7 erreichen, während die am Schiff bis über 10^9 betragen kann. Dies ist eine Hauptschwierigkeit der Schiffbau-Versuchsanstalten.

Wenn wir uns nun den Gasen zuwenden, so ist zuerst der Grad ihrer Kompressibilität zu definieren; und dazu eignet sich die Größe $dp/d\varrho$ oder auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Druckstörungen: die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{dp / d\varrho}$. Während in dem als inkompressibel angenommenen Flüssigkeitsmodell die Schallgeschwindigkeit unendlich groß ist, wird im Gas durch die Schallgeschwindigkeit bereits ein Geschwindigkeitsmaßstab vorgegeben. Die wichtigste Kenngröße ist daher hier das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, das ist die Mach'sche Zahl $Ma = U/c$.

Dort wo in einer Strömung steile Geschwindigkeitsgradienten vorkommen, spielt die in Gasen gewöhnlich kleine Zähigkeit eine Rolle, d. h. also wieder die Re-Zahl. Dann ist aber hier zugleich auch die Temperaturleitfähigkeit a zu berücksichtigen, also etwa die dimensionslose Prandtl-Zahl $Pr = \mu/\varrho a$ (für Luft ist $Pr = 0{,}73$). Denn in die Gasdynamik geht die Thermodynamik wesentlich mit ein. Die Gasdynamik ist ja insofern eine Erweiterung der Thermodynamik, als diese gewöhnlich nur Gleichgewichtszustände betrachtet, die Gasdynamik aber gerade die Zwischenvorgänge zwischen solchen, nämlich Transportprozesse von Impuls und Wärme im einzelnen.

Bei inkompressibler Flüssigkeit ist dagegen der Wärmeinhalt groß gegen die kinetische Energie der Strömung; daher sind Flüssigkeitsströmungen gewöhnlich isotherm. Natürlich gehen bei speziellen Fragen, wie z. B. der des Wärmeübergangs von einem festen Körper an eine vorbeifließende Flüssigkeit, auch deren Wärmeeigenschaften ein, und damit auch weitere Materialkonstanten mit den zugehörigen dimensionslosen Kennzahlen.

Bei gewissen Flüssigkeitsströmungen mit freier Oberfläche kann ferner die Oberflächenspannung maßgebend sein, wie z. B. bei den Kapillarwellen. Wichtiger ist für praktische Anwendungen der Dampfdruck p_d der Flüssigkeit; denn dort, wo der statische Druck p in einer Strömung kleiner wird als p_d, verdampft Flüssigkeit und es bildet sich ein Hohlraum (Kavitation). Wesentliche Dimensionslose ist dann die Kavitationszahl $\sigma = (p - p_d)/ \frac{\varrho}{2} U^2$, mit $\frac{\varrho}{2} U^2$ = Staudruck.

Erwähnt seien ferner Magneto-Hydrodynamik und Plasmaströmungen, bei denen die ursprünglich rein mechanische Strömungslehre weiter verkompliziert wird durch elektromagnetische Kräfte auf das Strömungsmedium. Ein allerdings fast triviales Beispiel hierfür ist der Einschnür-Effekt in Plasmen. Unter Plasma versteht man ein ionisiertes Gas mit guter elektrischer Leitfähigkeit. Fließt durch einen Plasmastrahl ein elektrischer Strom, so ist mit diesem ein Magnetfeld verknüpft, das konzentrisch quer zum Strahl wirkt. Überwiegt dieser magnetische Druck den statischen Druck im Strahl, so wird dieser eingeschnürt. (Derselbe Effekt tritt natürlich auch bei einer durchbrennenden elektrischen Sicherung auf.) Auch wenn kein elektrischer Strom fließt, verursacht ein äußeres Magnetfeld Kräfte auf ein strömendes Plasma, weil die negativ geladenen Elektronen wesentlich kleinere Masse haben als die positiven Ionen. Die Aerodynamiker sind an solchen Vorgängen deshalb interessiert, weil bei sehr hohen Mach-Zahlen, $Ma > 5$, in sogenannten Hyperschallströmungen, hinter dem Verdichtungsstoß am Flugkörper Temperaturen von mehreren tausend Celsiusgraden entstehen, wodurch die Luft dort dissoziiert (Beginn bei 2000 ° Celsius) oder gar ionisiert wird. Wenn man nun dieses Plasma sehr heißer, ionisierter Luft in Staupunktnähe magnetisch steuern könnte, wäre vielleicht eine Verringerung der Hitzezerstörungen am Flugkörper möglich. Den Plasmazustand eines hoch erhitzten Gases kann man geradezu als vierten Aggregatzustand bezeichnen, in Analogie zur alten Bezeichnung der vier Elemente: Erde, Wasser, Luft und Feuer.

In der Meteorologie schließlich ist die Kompressibilität der Luft nicht wegen hoher Strömungsgeschwindigkeiten, sondern wegen der großen räumlichen Abmessungen der betrachteten Strömungsgebiete zu berücksichtigen; Druck und Dichte in der Atmosphäre verringern sich um rd. 1 % bei 80 m Höhenunterschied. Die Annahme der Barotropie und Homogenität des Mediums ist hier manchmal nicht mehr zulässig. Denn spezifische Strömungsprobleme ergeben sich hier z. B. aus der Schichtung verschieden erwärmter Luftmassen und deren vom örtlich verschiedenen Luftdruck verursachten Bewegungen unter dem Einfluß von Corioliskräften infolge der Erddrehung.

Analoge Probleme im Wasser behandelt die Ozeanographie als Gegenstück zur Meteorologie: Kalte und warme Meeresströmungen, Zusammentreffen von Süß- und Salzwasser, wie z. B. in den norwegischen Fjorden. Hauptprobleme sind hier aber natürlich des Meeres und der Tide Wellen.

Streng genommen erzeugt übrigens jede Strömung einer zähen Flüssigkeit von selbst Inhomogenitäten. Denn an Stellen großer Schergeschwindigkeiten wird durch die Wirkung der Zähigkeit mechanische Energie in Wärmeenergie umgewandelt oder dissipiiert, wodurch Temperaturunterschiede entstehen, die wiederum die Flüssigkeitszähigkeit verändern können; denn in vielen Flüssigkeiten hängt die Zähigkeit stark von der Temperatur ab. Diese Komplikation ist in der Theorie der Schmierung zu berücksichtigen, wo große Schergeschwindigkeiten und große Zähigkeit mit starker Temperaturabhängigkeit des Schmieröls zusammentreffen.

Die bisher erwähnten Strömungsmedien können noch als Kontinua aufgefaßt werden. Bei Strömungsvorgängen in einem hochverdünnten Gas dagegen, z. B. beim Flug irgendeines Körpers durch die Grenze der Atmosphäre ist das natürlich nicht mehr zulässig. Ein Maß für die Zulässigkeit ist offenbar die Knudsen-Zahl $Kn = \Lambda/L$, mit Λ = freie Weglänge der Gasmoleküle in Körpernähe und L = Körperabmessung. Wenn diese Zahl von der Größenordnung 1 ist, muß man Begriffe der Gaskinetik einführen. Außer in hochverdünnten Gasen muß man das auch zum Studium der Feinstruktur eines Verdichtungsstoßes tun. In solchen Stößen, die in Überschallströmungen auftreten, springen Druck, Dichte und Temperatur plötzlich in Gebieten an, deren Dicke L (in Strömungsrichtung) von der Größenordnung Λ ist; solange man sonst das Gas als Kontinuum ansehen kann, betrachtet man diese Stöße deshalb als unstetige Zustandsänderungen. Bei Gasen kann man übrigens die makroskopische Zähigkeit gaskinetisch ausdrücken durch $\mu \sim \varrho \Lambda \bar{v}$, mit $\bar{v}$ = mittlere Molekülgeschwindigkeit. Damit kann man die Re-Zahl einer Gasströmung auch anschaulich deuten durch $Re \sim \frac{U}{\bar{v}} \cdot \frac{L}{\Lambda}$. Da weiter die mittlere Molekülgeschwindigkeit $\bar{v}$ proportional der Schallgeschwindigkeit c ist, kann man auch schreiben $Re \sim Ma/Kn$.

Als ein ganz anders geartetes Diskontinuum, das weniger bekannt ist, darf vielleicht noch trockener Sand erwähnt werden. Faßt man den Begriff Strömungslehre nur weit genug, so daß auch die Rheologie dazugezählt wird, so ist ja auch das Fließen des Sandes in einer Sanduhr ein zugehöriges Problem. Daß hier schon das statische Verhalten ganz ungewohnt sein kann, zeigt das folgende Beispiel. In ein Stahlrohr, das auf eine Bodenplatte aufgeschweißt ist, wird eine Eisenstange gestellt und der Zwischenraum — unter leichtem Klopfen an die Rohrwand — mit homogenem Sand (mit gleichgroßen Körnern) gefüllt. Wenn das geschehen ist, kann selbst ein starker Mann die Stange nicht mehr herausziehen. Die Erklärung folgt aus einer Eigenschaft des Sandes, die Reynolds 1885 fand und Dilatanz nannte. Der Einfachheit halber denken wir uns den Sand aus gleich großen Kugeln bestehend. Durch das leichte Klopfen beim Auffüllen legen sich die Körner in die engste Kugelpackung, d. h. die Mittelpunkte von je vier Körnern bilden ein Tetraeder. Beim Versuch, die Stange herauszuziehen, entsteht zwischen den Körnern und der Stange Coulomb'sche Reibung proportional dem Anpressungsdruck. Und dieser Druck steigt an, je mehr man versucht, die wandnächsten Körner an der Stange mit nach oben zu ziehen. Ein Abrollen der starren Kugeln wäre erst bei kubischer Packung möglich, wenn die Mittelpunkte acht benachbarter Kugeln einen Würfel bildeten. Diese Anordnung braucht aber ein größeres Volumen als die ursprüngliche, engste Packung und die entsprechende Volumenvergrößerung ist durch das Stahlrohr verhindert. Zieht man die Stange mit Gewalt heraus, etwa maschinell, so wird dabei etwas Sand zermahlen.

Nach diesem kurzen Überblick über die charakteristischen Eigenschaften verschiedener Strömungsmedien mögen noch einige Bemerkungen über mathematische Probleme der Strömungslehre folgen, wobei wir uns auf die einfachsten Kontinua beschränken. Man beschreibt Strömungen gewöhnlich durch das Geschwindigkeitsfeld in einem Raum- oder körperfesten Koordinatensystem, also durch $\mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t)$, mit $\mathfrak{r}$ = Nullpunktsabstand des betrachteten Punktes im Strömungsfeld und t = Zeit. Newtons Grundgesetz Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung bezieht sich dagegen auf die individuellen Flüssigkeitsteilchen; man muß daher zum Aufstellen der Feldgleichungen die substantielle Beschleunigung $\mathfrak{b}$ eines Teilchens ausdrücken durch die Feldgröße $\mathfrak{v}$ und erhält dafür $\mathfrak{b} = \partial\mathfrak{v}/\partial t + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{v}^2}{2} - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ (lokale und konvektive Beschleunigung). Dieser Ausdruck ist leider nicht-linear in der gesuchten Variablen $\mathfrak{v}$ und dementsprechend sind auch die Feldgleichungen im allgemeinen nicht-linear, ganz unabhängig von den Eigenschaften des Strömungsmediums und der äußeren Kräfte.

Nichtlineare Differentialgleichungen sind nun so unangenehm, daß man ihnen nach Möglichkeit aus dem Wege geht. Das gelingt bei der reibungslosen und inkompressiblen Flüssigkeit am besten. Denn hier existiert — von singulären Stellen abgesehen — ein Geschwindigkeitspotential Φ, mit $\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\Phi$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$. Man kann sich das etwa so plausibel machen: Da hier keine Schubspannungen auftreten können, sondern nur Normaldrücke, so kann in der Regel kein Teilchen in Drehung versetzt werden. Für die ideale Flüssigkeit folgt dann aus der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ sofort $\Delta\Phi = 0$, und das ist eine lineare Gleichung für $\Phi(\mathfrak{r}, t)$. Die Theorie der Strömungen idealer Flüssigkeiten läßt sich folglich mathematisch bis in alle Einzelheiten verfolgen, sie ist mathematisierbar und zwar so sehr, daß Bücher darüber von Nichtmathematikern leicht für Mathematikbücher gehalten werden können.

Für reibungslose kompressible Gase kann man ebenso ein Geschwindigkeitspotential voraussetzen, doch ist die zugehörige Gleichung im allgemeinen durchaus nichtlinear, sie kann sogar ihren Typus wechseln. Für Unterschallströmungen mit $Ma < 1$ ist sie vom elliptischen Typ (ebenso wie bei der idealen Flüssigkeit), für Überschallströmungen mit $Ma > 1$ ist sie dagegen hyperbolisch; besonders schwierig sind daher Unterschallströmungen mit lokalen Überschallgebieten und umgekehrt, also schallnahe Strömungen. Linearisieren kann man die Grundgleichung dann, wenn nur kleine Druck- und Dichteänderungen auftreten. Das ist einerseits in der Akustik der Fall, andererseits in der Gasdynamik, z. B. bei schlanken Tragflügeln mit kleinen Anstellwinkeln, die die parallele Grundströmung nur wenig stören. Voraussetzung ist allerdings, daß entweder überall Unterschall- oder überall Überschallströmung herrscht. Schallnahe oder transonische Probleme sind dagegen wesentlich nichtlinear. Für sehr hohe Mach-Zahlen ($Ma > 5$) kann man aus physikalischen Gründen überhaupt nicht mehr Wirbelfreiheit und die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials annehmen, weil der Entropieanstieg in den starken Verdichtungsstößen nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Mit dem Modell des reibungslosen Mediums lassen sich bekanntlich schon sehr viele Strömungsvorgänge in Flüssigkeiten oder Gasen genau genug darstellen, insbesondere auch viele zunächst überraschende Beobachtungen in der Gasdynamik. Andererseits versagt dieses Modellmedium in mancher Beziehung grundsätzlich. Es sei nur an das D'Alembert'sche Paradoxon erinnert: Ein Körper, der sich gleichförmig in einer wirbelfreien, reibungslosen und unbegrenzten Flüssigkeit bewegt, erfährt überhaupt keinen Widerstand. Erst dann, wenn man die in wirklichen (zähen) Flüssigkeiten stets auftretenden Wirbel in Körpernähe auch im Modell nachahmt, kann man einen Widerstand errechnen. So kann man z. B. in der Tragflügeltheorie idealer Flüssigkeiten den sog. induzierten Widerstand aus den abgehenden freien Wirbeln berechnen. Ferner kann man in einzelnen anderen Fällen die Wirbelbewegung hinter einem Widerstandskörper durch Potentialströmungen mit Singularitäten in den Grundzügen gut nachahmen; so z. B. bei den Kármán'schen Wirbelstraßen durch eine Reihe von Potentialwirbeln und bei der Helmholtz-Kirchhoff-Strömung durch Wirbelschichten, in denen das Geschwindigkeitspotential unstetig ist. Energetisch bleiben diese Potentialströmungen aber in den Einzelheiten deshalb unbefriedigend, weil erst in einer zähen Flüssigkeit eine Energiedissipation erklärbar ist, d. h. die Umwandlung der mechanischen Verlustleistung (Widerstand mal Anströmgeschwindigkeit oder Fahrtgeschwindigkeit) in thermische Energie.

Strömungen in zähen Flüssigkeiten sind nicht mehr rotationsfrei, so daß hier kein Geschwindigkeitspotential existiert. Die zugehörigen Navier-Stokes'schen Grundgleichungen sind nichtlinear in $\mathfrak{v}$ und (wegen der Zähigkeitsglieder) von zweiter Ordnung; wegen der mathematischen Schwierigkeiten sind strenge Lösungen nur bei besonders einfachen Randbedingungen bekannt. Für extrem kleine Geschwindigkeiten ($Re \ll 1$), für die sog. schleichenden Strömungen, kann man zwar auch hier linearisieren, indem man im Ausdruck für die Beschleunigung (s. Seite 77) die beiden nichtlinearen Glieder völlig vernachlässigt; es werden dann gegenüber den Druck- und Zähigkeitskräften die Trägheitskräfte in der Strömung ganz unbeachtet gelassen. Das führt z. B. zu der bekannten Widerstandsformel für eine Kugel nach Stokes. Der Gültigkeitsbereich dieser Formel ist aber sehr beschränkt, z. B. auf die Brown'sche Bewegung oder auf die feinen Öltröpfchen in Millikans Messung der elektrischen Elementarladung; dagegen haben auch kleine Regentropfen hierfür schon eine viel zu hohe Re-Zahl. Und auch die Oseen'sche Methode, die Trägheitsglieder teilweise zu berücksichtigen, bleibt auch nur für sehr kleine Re-Zahlen anwendbar.

Praktisch interessiert aber gerade der andere Grenzfall sehr großer Re-Zahlen. Diesem Fall scheinen zunächst die Strömungen in reibungsloser Flüssigkeit zu entsprechen, da ja hier in einem gewissen Sinn die Re-Zahl unendlich groß ist; und tatsächlich erfüllen die Potentialströmungen die Feldgleichungen für zähe Flüssigkeiten sogar für jede Re-Zahl. Aber sie genügen nicht den wahren Randbedingungen an festen Wänden. In den Potentialströmungen reibungsloser Flüssigkeiten kann man nämlich nur die kinematische, triviale Randbedingung erfüllen, daß die Flüssigkeit in eine feste Wand weder hinein noch hinausströmt, d. h., daß die Geschwindigkeit dort parallel zur Wand ist aber beliebig groß sein kann. Die Feldgleichungen für zähe Flüssigkeiten sind nun von höherer Ordnung (und zwar um eine Ordnung) als die für reibungslose Flüssigkeiten, so daß hier noch eine weitere Randbedingung erfüllt werden kann. Und alle wirklichen Flüssigkeiten und Gase großer oder kleiner Zähigkeit scheinen das durchaus zu wissen, denn sie haften alle an festen Wänden, d. h. es verschwindet in ihnen nicht nur die Normalkomponente der Flüssigkeitsgeschwindigkeit, sondern auch noch die Tangentialkomponente. Zumindest in Wandnähe ist daher die Potentialströmung um einen Körper zu korrigieren. Für große Re-Zahlen besteht nun dieses wandnahe Gebiet nur aus einer dünnen Schicht am Körper, der sog. Grenzschicht.

Die Grundidee dieser Grenzschichttheorie von L. Prandtl ist daher die, daß man außerhalb der Schicht noch mit der einfachen Potentialströmung rechnet und nur innerhalb der Schicht die Grundgleichungen für zähe Flüssigkeiten zu berücksichtigen braucht, die man aber hier mathematisch vereinfachen kann, da in der dünnen Grenzschicht z. B. die Geschwindigkeit parallel zur Wand angenommen werden kann. Diese Theorie hat sich glänzend bewährt sowohl für Flüssigkeiten wie für Gase, und man kann hiermit auch Strömungswiderstände berechnen.

Zum Schluß muß aber noch das ungelöste Hauptproblem der Strömungslehre, das Turbulenzproblem, erwähnt werden. Hat man nämlich für ein spezielles Strömungsproblem das Geschwindigkeitsfeld näherungsweise mit der Grenzschichttheorie oder sogar streng nach den Gleichungen zäher Flüssigkeiten berechnet, so zeigt der Vergleich mit dem Versuch, daß diese Lösungen nur solange die wirkliche Strömung darstellen, als die Re-Zahl unter einer kritischen Zahl ($Re < Re_{krit}$) bleibt. Oberhalb dieser Zahl erweist sich die jeweilige Strömung als instabil und es entsteht eine völlig anders geartete turbulente Strömung; und fast alle technischen Strömungen gehören leider zu dieser Klasse. Wir haben bisher stillschweigend als selbstverständlich angenommen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine eindeutige Funktion vom Ort und der Zeit sei, daß also die Flüssigkeitsteilchen sich auf angebbaren Bahnlinien wie auf Schienen bewegen und aneinander in Schichten vorbeigleiten. Diesen Strömungszustand nennt man laminar. In turbulenter Strömung machen aber die Teilchen von ihrer leichten Verschiebbarkeit weit mehr Gebrauch als den Theoretikern lieb ist, und die Zähigkeit ist hier zu klein, um den Übermut der Teilchen zu dämpfen. Man kann hier nur eine mittlere Geschwindigkeit definieren, der prinzipiell unregelmäßige Schwankungen überlagert sind, die nur statistisch beschrieben werden können. Veranschaulichen kann man diese Schwankungsbewegungen durch ein Gemisch großer und kleiner Wirbel, die der mittleren Strömung überlagert sind; daher der Name Turbulenz. Auch bei zeitlich unveränderlichen, also stationären Randbedingungen ist hier jede Strömung im Detail instationär, wobei nach wie vor die nichtlinearen Grundgleichungen gelten; von Interesse sind aber nur die Mittelwerte dieser komplizierten Strömung. Obwohl G. I. Taylor bereits 1935 die Grundlagen für eine statistische Turbulenztheorie geschaffen hat, kann man auch heute noch nicht so primitiv erscheinende Probleme wie z. B. das der Rohrströmung streng lösen. Die bekannte Hagen-Poiseuille-sche Lösung hierfür gilt ja nur für laminare Strömung, etw in Kapillaren (Durchmesser d) solange $Re = \varrho U d / \mu$ kleiner als 2000 ist. Natürlich findet man in jedem Ingenieurhandbuch ausreichende Daten über den Druckverlust in Rohren für $Re > 2000$, aber das sind lediglich Ergebnisse von Modellversuchen, denn eine strenge Theorie der Wasserleitung steht eben noch aus.

Nachdem wir oben eine Vielzahl von Problemen aufgezählt haben, die in der Strömungslehre z. T. oft überraschend gut gelöst werden konnten, zeigt sich nun, daß eine große Anzahl gerade der technischen Grundprobleme, die schon sehr alt sind und zunächst als die allereinfachsten Strömungsprobleme erscheinen, auch heute noch ungelöst sind, insofern, als keine strenge Theorie für sie existiert.

Wenn man mit anderen, oft sehr viel jüngeren Teilgebieten der Physik vergleicht, ist dieser Tiefstand an theoretischer Durchdringung innerhalb einer klassischen Disziplin der Mechanik eigentlich erstaunlich. Man kann das natürlich bedauern. Man kann aber andererseits auch den Hauptreiz der Strömungslehre gerade darin sehen, daß derart alte Grundprobleme noch immer auf eine theoretische Erfassung warten.

(Eingegangen am 11. Februar 1961)