

196 | August 1967

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W. Kay Meyerhoff

### Der Stoß eines Wasserkeils gegen eine keilförmige Wand

**TUHH**

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 196

Der Stoß eines Wasserkeils gegen eine keilförmige Wand

von

W. Kay Meyerhoff

Hamburg, August 1967

## Inhaltsübersicht

- 1) Einleitung
- 2) Verzeichnis der Symbole
- 3) Angenäherte Beschreibung der Strömung
- 4) Berechnung der hydrodynamischen Masse
- 5) Berechnung der Druckverteilung an der Wand
- 6) Berechnung der benetzten Breite
- 7) Ergebnisse des Rechenprogramms
- 8) Schlußbemerkung
- 9) Literaturverzeichnis

Anhang I: Linearisierung der Gleichungen, die den Stoß eines Wasserkeils gegen eine keilförmige Wand beschreiben

Anhang II: Berechnung der Integrale  $M_m(\alpha, \beta)$

Anhang III: Berechnung der Integrale  $I_m(\alpha, \beta)$

Anhang IV: ALGOL-Programm

Anhang V: Bewegungsgleichungen

## 1) Einleitung

Über das Problem des Stoßes eines Wasserkeils gegen eine feste Wand sind bisher nur zwei Arbeiten veröffentlicht worden. In der ersten der beiden Arbeiten haben Borissowa, Korjawow und Moissejew [3], die von Wagner [13] abgeleiteten Beziehungen zwischen der Gleichung für die freie Oberfläche und der resultierenden Kraft benutzt. Diese Beziehungen gelten für den Spezialfall, daß die Geschwindigkeit konstant ist. Die Strömung ist dann zu allen Zeiten ähnlich. Borissowa, Korjawow und Moissejew [3] führen einen Näherungsansatz für die freie Oberfläche ein, der die Kontinuitätsbedingung erfüllt. Mit Hilfe dieser Näherung wird die Stoßkraft sowohl für das ebene wie für das rotationssymmetrische Problem bestimmt. Die gewählte Näherung für die freie Oberfläche hat den Nachteil, daß der Spritzer sehr dick wird.

Die zweite Arbeit stammt von Cumberbatch [4]. Auch hier wird eine zu allen Zeiten ähnliche Strömung vorausgesetzt und die exakte nichtlineare Oberflächenrandbedingung erfüllt. Es werden zwei Lösungen, die in sehr großer Entfernung von der ebenen Wand bzw. in der Spitze des Spritzers gelten, miteinander kombiniert. Es handelt sich in beiden Fällen um Entwicklungen der Keilströmung. Unglücklicherweise liegt die Stelle, an der die beiden Teile zusammengefügt werden, in der Spritzerwurzel. Hier erfordert die Darstellung der Strömung gerade besondere Aufmerksamkeit. Die errechnete Druckverteilung bleibt daher im Bereich der Spritzerwurzel unbefriedigend. Cumberbatch [4] führt die Rechnungen für Keilwinkel von  $90^\circ$  bzw.  $45^\circ$  ( $\alpha = 45^\circ$  bzw.  $67,5^\circ$ ) durch, also für schlanke Keile.

In der vorliegenden Untersuchung wird die von v. Karman [7] und von Wagner [13] eingeführte Linearisierung des Stoßproblems auch auf das Problem des Stoßes eines Wasserkeils gegen einen festen Keil angewandt. Diese Linearisierung erlaubt auch die Behandlung von beliebigen Bewegungsabläufen. Sie ist damit das wichtigste Hilfsmittel in der Theorie der hydrodynamischen Stöße. Die systematische Linearisierung im Anhang I läßt sich nur unter der Voraussetzung durchführen, daß sowohl der feste Keil wie auch der

Wasserkeil sehr stumpf sind. Diese Linearisierung wird hier auch für größere Keilwinkel angewendet, was im strengen Sinne nicht zulässig ist. Die Ergebnisse sind zumindest in ihren Tendenzen nützlich.

Die linearisierte Theorie wurde von Sedow [9] auf den Stoß eines Keils mit größerer Kielung angewendet. Er setzt aber voraus, daß der Keil vor dem Stoß in der ebenen Wasseroberfläche schwimmt. Dann sind die Voraussetzungen der Linearisierung in der ersten Phase des Stoßes erfüllt. Monaghan [11] und unabhängig davon Bisplinghoff und Doherty [2] wendeten die linearisierten Bedingungen auch auf den Stoß schlanker Keile auf eine ebene Wasseroberfläche an. Die Benetzungskorrektur hat in beiden Arbeiten den gleichen Fehler. Dieser Fehler wurde zuerst von Fabula [5] und später noch einmal von Ferdinande [6] korrigiert. Die Ergebnisse von Fabula und Ferdinande sind als Grenzfälle in den hier errechneten Ergebnissen enthalten.

Es soll noch eine Bemerkung zu einer irrigen Vorstellung gemacht werden, die auch bei Cumberbatch [4] angeführt wird. Danach müßte eine grobe Abschätzung der auf die Wand wirkenden Kraft in der Form möglich sein, daß man annimmt, daß der Wasserkeil die Wand unverändert durchsetzt, jedoch seinen Impuls verliert. Man erkennt aber, daß diese Vorstellung genau einer stationären Betrachtungsweise entspricht. Man erhält nämlich dieses Ergebnis durch Anwendung des Impulssatzes für stationäre Strömung, wenn die Kontrollfläche ganz kurz vor die feste Wand gelegt wird. Eine stationäre Betrachtungsweise ist aber nicht zulässig. Man hat vielmehr zu beachten, daß die Beeinflussung der Strömung durch die Wand weit in den Wasserkeil hineinreicht. Aus Ähnlichkeitsgründen reicht der Einfluß offenbar umso weiter, je größer die Kontaktfläche zwischen Wand und Wasser ist. Damit kommt man aber auf die physikalische Deutung der hydrodynamischen Masse.

## 2) Verzeichnis der Symbole

a	Konstante (vgl. Gl.(7))
A, A'	Konstanten
$b_m$	Koeffizienten der Reihe (vgl. Gl.(16))
B, B'	Konstanten

$c$	Halbe Breite des benetzten Teils der Wand
$\dot{c}$	Zeitliche Ableitung von $c$
$c'$	Halbe Breite der idealen Durchdringung der Keile
$\dot{c}'$	Zeitliche Ableitung von $c'$
$c/c'(\alpha, \beta)$	Benetzungskorrektur
$f(x, t)$	Ordinate der freien Oberfläche des Wasserkeils
$\tilde{f}$	Grenze des ideellen Wasserkeils
$F(x, y, t)=0$	implizite Form der freien Oberfläche des Wasserkeils
$i$	$= \sqrt{-1}$
$I_m(\alpha, \beta)$	Hilfsintegrale (vgl. Gl.(42) und Anhang III)
$Im$	Imaginarteil
$k(x, t)$	Ordinate der Körperkontur
$K(x, y, t)=0$	Implizite Form der Körperkontur
$K(\alpha, \beta)$	Koeffizient der hydrodynamischen Masse (vgl. Gl.(23), (24))
$m$	Index
$M$	Höchstes Glied der abgebrochenen Reihe
$M$	Masse des festen Körpers je Längeneinheit
$M_m(\alpha, \beta)$	Hilfsintegral (vgl. Gl.(17) und Anhang II)
$M''$	Auf die Längeneinheit bezogene hydrodynamische Masse
$n$	Nach innen in die Flüssigkeit gerichtete Normale
$N$	Zahl der Einzelschritte zur Simpsonintegration der Hilfsfunktion $f(\alpha, \alpha, \beta)$ (vgl. Anhang III)
$p$	Druck
$P$	Stoßkraft
$r$	Abszisse in der Hilfsebene $t$
$Re$	Realteil
$s$	Ordinate in der Hilfsebene $t$
$t = x+iy$	Hilfsebene
$t$	Zeit, $t=0$ Zeit des Berührens der Keilspitzen
$t'$	Integrationsvariable
$t_c$	Zeit, zu der die benetzte Breite $2c$ ist.
$T$	Kinetische Energie der Strömung je Längeneinheit
$n$	Hilfsgröße nach Wagner (vgl. Gl.(31))
$u$	Integrationsvariable
$V$	Begegnungsgeschwindigkeit der beiden Keile
$\dot{V}$	Zeitliche Ableitung von $V$
$V_0$	Auftreffgeschwindigkeit

*Im*

*klein s*

*u*

$W = \phi + i\psi$	Charakteristische Funktion
$x$	Abszisse in der Ausgangsebene $z$
$y$	Ordinate in der Ausgangsebene $z$
$z = x + iy$	Ausgangsebene
$\alpha$	Winkel der Oberfläche des Wasserkeils gegenüber der $x$ -Achse
$\beta$	Winkel der Wand gegenüber der $x$ -Achse
$\Gamma$	Gamma-Funktion
$Z = \xi + i\eta$	Hilfsebene
$\eta$	Ordinate in der Hilfsebene $Z$
$\kappa$	Hilfsgröße (vgl. Gl.(16))
$\xi$	Abszisse in der Hilfsebene $Z$
$\rho$	Dichte der Flüssigkeit
$\phi$	Geschwindigkeitspotential (Vorzeichen nach <u>Lamb</u> , so daß die Geschwindigkeit die negative Ableitung ist).
$\psi$	Stromfunktion

### 3) Angenäherte Beschreibung der Strömung

Die angenäherte Beschreibung der Strömung beim Stoß eines Wasserkeils gegen eine keilförmige Wand lehnt sich auch im Falle nicht sehr stumpfer Keile eng an das Ergebnis der systematischen Linearisierung an. Dabei muß betont werden, daß bei der systematischen Linearisierung die Voraussetzung gemacht wird, daß der Winkel zwischen der ursprünglichen Wasseroberfläche und der Wand klein ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Durchdringungstiefe der Keile und damit auch die Änderungen der freien Oberfläche klein sind gegenüber den Abmessungen des Wasserkeils bzw. der Wand.

Diese Voraussetzung ist bei den nichtstumpfen Keilen nicht erfüllt. Die Darstellung stellt also nur eine Näherung dar.

Von den Ergebnissen der Linearisierung sollen nur die Bedingungen für den Druck beibehalten werden, und zwar, daß vom Druck nur der instationäre Anteil  $p = -\rho \phi_t$  berücksichtigt wird. Dies ist die Voraussetzung dafür, daß das Konzept der hydrodynamischen Masse in Verbindung mit dem Impulssatz angewendet werden darf. Die zugehörige Bedingung ist, daß an der freien Oberfläche  $\phi = 0$  gilt. Diese Bedingung soll weiterhin an <sup>der</sup> ursprünglichen Oberfläche des Wasserkeils erfüllt werden.

1,56

Komma

der

Im folgenden setzen wir voraus, daß der Wasserkeil im Bezugssystem ruht. Der feste Keil nähert sich ihm mit der Geschwindigkeit  $V$ . Es gilt dann Diagramm 1

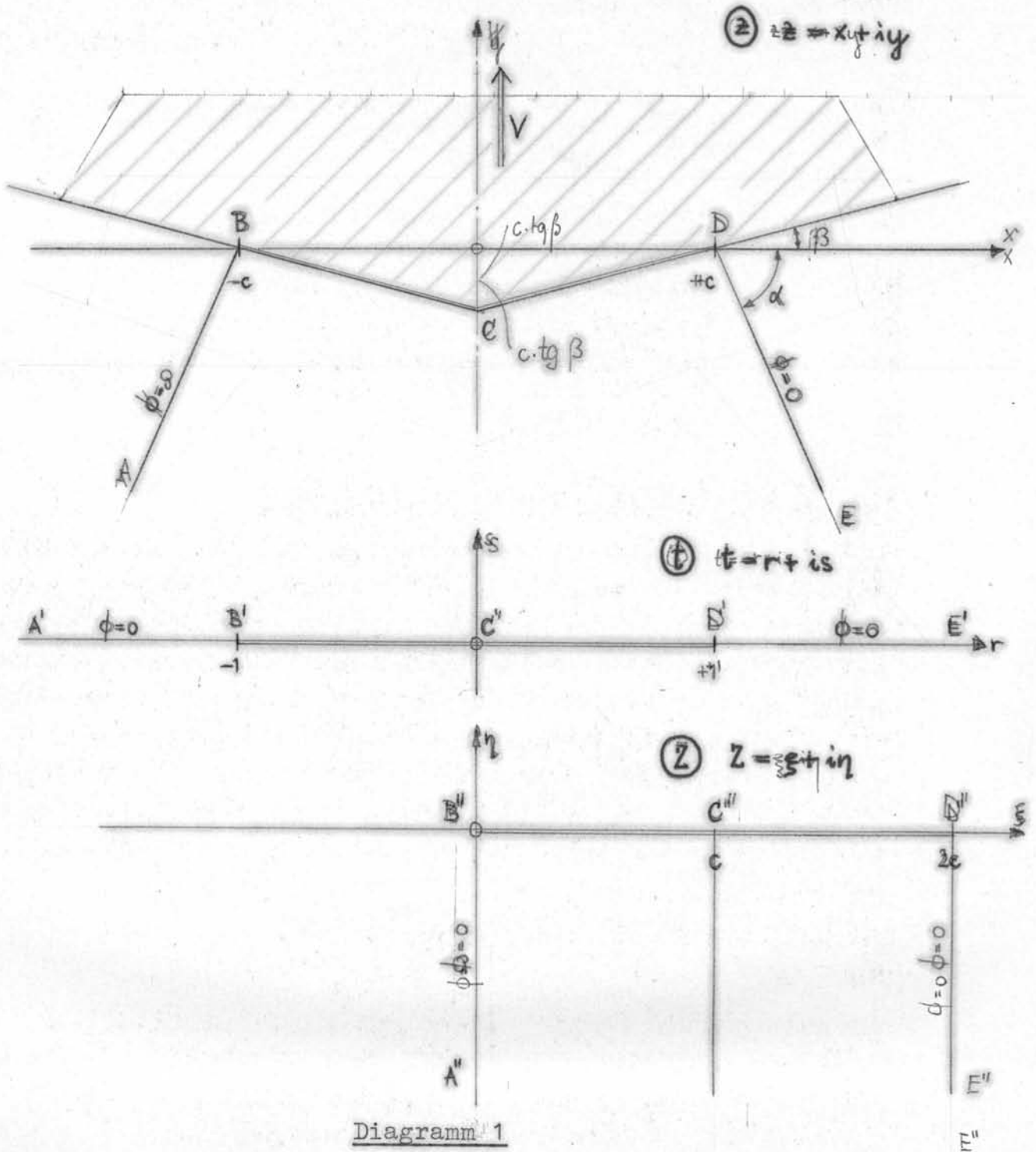


Diagramm 1

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials  $\phi$  gelten folgende Randbedingungen (für das Geschwindigkeitspotential gilt die Vorzeichenfestsetzung von Lamb [8], nämlich  $u = -\partial\phi/\partial x$ ,  $v = -\partial\phi/\partial y$ ):

b  
w

1) An der freien Oberfläche  $\overline{AB}$  und  $\overline{DE}$  gilt

$$\phi(x, y) = 0 \quad \text{auf } \overline{AB} \text{ und } \overline{DE} \quad (1)$$

2) An der Körperoberfläche  $\overline{BCD}$  gilt:

auf  $\overline{CD}$ : 
$$K(x, y, t) = y - (x - c(t)) \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \operatorname{tg} \beta - \frac{\partial \phi}{\partial y} - V = 0 \quad \text{auf } \overline{CD} \quad (2)$$

auf  $\overline{BC}$ : 
$$K(x, y, t) = y + (x + c(t)) \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{DK}{Dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \operatorname{tg} \beta - \frac{\partial \phi}{\partial y} - V = 0 \quad \text{auf } \overline{BC} \quad (3)$$

### Bestimmung der Abbildungsfunktionen

Das Geschwindigkeitspotential, das diesen Randbedingungen genügt, kann durch zweimalige Anwendung der konformen Abbildung nach Schwarz und Christoffel (vgl. Lamb [8] §73) aus dem Potential einer stehenden Welle gewonnen werden. Man benötigt dazu die beiden Hilfsebenen  $t = r + is$  und  $Z = \xi + i\eta$  neben der Ausgangsebene  $z = x + iy$ .

Die Bedingung (1) wird durch die Abbildungen nicht beeinflusst. Die Körperwandbedingungen (2) und (3) dagegen werden durch die Abbildung beeinflusst.

Für die Abbildung der  $z$ -Ebene auf die  $Z$ -Ebene gilt:

$$dz = A \cdot t^{2\beta/\pi} \cdot (t^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \cdot dt \quad (4)$$

Zur Bestimmung der integrierten Form von (4) schreiben wir zunächst

$$dz = A \cdot e^{i(\alpha+\beta)} \cdot t^{2\beta/\pi} \cdot (1-t^2)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \cdot dt \quad (5)$$

Diese Form ist zweckmäßig im Abschnitt  $\overline{CD}$ . Es gilt zur Bestimmung der Konstanten:

im Punkt C:  $t = 0$  und  $z = -ic \operatorname{tg} \beta$

im Punkt D:  $t = 1$  und  $z = c$

$$z = A \cdot e^{i(\alpha+\beta)} \int_0^t t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \cdot dt + B$$

für  $C(t = 0)$  folgt:

$$z = A \cdot e^{i(\alpha+\beta)} \int_0^t t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt - ic \cdot \operatorname{tg} \beta$$

für  $D(t = 1)$

$$c = A \cdot e^{i(\alpha+\beta)} \int_0^1 t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt - ic \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Es wird folgende Bezeichnung eingeführt

$$a = \int_0^1 t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt$$

Dieses Integral läßt sich durch die Beta- bzw. Gammafunktion darstellen (vgl. z.B. Abramowitz und Stegun [1]). Man erhält:

$$a = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2 + \beta/\pi) \cdot \Gamma(1 - \alpha/\pi - \beta/\pi)}{\Gamma(3/2 - \alpha/\pi)} \quad (7)$$

Nach einigen Umformungen folgt damit schließlich

$$A = \frac{c}{a \cdot \cos \beta} \cdot e^{-i\alpha}$$

Es gilt für die Abbildungsfunktion:

$$dz = \frac{c}{a \cdot \cos \beta} e^{i\beta} \cdot t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt \quad (8)$$

Diese Form gilt für den Bereich  $\overline{CD}$  und nach Umformungen auch für  $\overline{DE}$ . Die Ableitung für den Bereich  $\overline{BC}$  erfolgt ganz analog. Es kann dann gezeigt werden, daß beide Formen in der Schreibweise enthalten sind:

$$dz = (-1)^{-\beta/\pi} \frac{c}{a \cdot \cos \beta} t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt \quad (9)$$

$$z = (-1)^{-\beta/\pi} \frac{c}{a \cdot \cos \beta} \int_0^t t^{2\beta/\pi} (1-t^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} dt - ic \operatorname{tg} \beta \quad (10)$$

Die Abbildung der Z-Ebene auf die t-Ebene ist wesentlich einfacher. Es gilt:

$$\begin{aligned} dZ &= A' (t^2 - 1)^{-1/2} dt \\ &= \pm i A' (1 - t^2) dt \end{aligned} \quad (11)$$

dabei gilt das positive Vorzeichen für den Bereich  $\overline{CD}$ .

Man hat die Bedingung:

im Punkt C:  $t = 0$  und  $Z = c$

im Punkt D:  $t = 1$  und  $Z = 2c$

$$Z = iA' \int_0^t (1-t^2)^{-1/2} dt + B'$$

für C ( $t = 0$ ) folgt:

$$Z = iA' \int_0^t (1-t^2)^{-1/2} dt + c$$

für D ( $t = 1$ ):

$$2c = iA' \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} dt + c$$

wobei

$$a' = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

und schließlich

$$iA' = \frac{2c}{\pi} ;$$

somit gilt für die Abbildung

$$dZ = \frac{2c}{\pi} (1-t^2)^{-1/2} dt \quad (12)$$

$$Z = \frac{2c}{\pi} \int_0^t (1-t^2)^{-1/2} dt + c \quad (13)$$

Diese Form ist gültig für den gesamten Bereich.

#### Darstellung des Geschwindigkeitspotentials

~~Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß man nicht erwarten darf,~~

Darstellung des Geschwindigkeitspotentials

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß man nicht erwarten darf, daß die Geschwindigkeiten, d.h. partielle Ableitungen des Potentials nach den Ortskoordinaten, bei den Abbildungen erhalten bleiben. Man muß vielmehr in der Z-Ebene im Abschnitt B"C"D" eine andere Geschwindigkeitsverteilung erwarten als auf dem Abschnitt BCD in der z-Ebene.

Um eine beliebige Geschwindigkeitsverteilung in der Z-Ebene darstellen zu können, wird ein Fourier-Reihenansatz gemacht. Man kann zeigen, daß die  $\eta$ -Komponenten der Geschwindigkeit zu den Punkten  $Z = 0$  und  $Z = 2c$  antisymmetrisch sein muß. Man kann also ansetzen:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = V \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \quad (14)$$

Die zugehörige charakteristische Funktion  $W = \phi + i\psi$  hat die Form

$$W(Z) = -i \frac{2c}{\pi} V \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{2m-1} e^{i(2m-1) \frac{\pi Z}{2c}} \quad (15)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingung (1) automatisch. Die Koeffizienten  $b_m$  müssen so bestimmt werden, daß die Randbedingungen (2) und (3) in der z-Ebene erfüllt werden.

Bezeichnet man die Oberfläche der festen Wand mit  $y = k(x \cdot t)$ , so gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=k} &= -\operatorname{Re} \left( \frac{dW}{dz} \right) \Big|_{y=k} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=k} &= \operatorname{Im} \left( \frac{dW}{dz} \right) \Big|_{y=k} \end{aligned}$$

dabei ist:

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{y=k} = \frac{dW}{dZ} \Big|_{y=k} \cdot \frac{dZ}{dz} \Big|_{y=k}$$

und

$$\frac{dW}{dZ} = V \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot e^{i(2m-1) \frac{\pi Z}{2c}}$$

Im folgenden müssen die Abschnitte  $\overline{BC}$  und  $\overline{CD}$  wegen der unterschiedlichen Vorzeichen getrennt behandelt werden. Es genügt aber, nur den einen Abschnitt zu betrachten, da die Symmetriebedingungen bereits im Ansatz berücksichtigt sind. Wir betrachten den Abschnitt  $\overline{CD}$ :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2a}{\pi} \cos \beta \cdot e^{-i\beta} \cdot t^{-2\beta/\pi} (1-t^2)^{\alpha/\pi + \beta/\pi - 1/2} \quad \text{auf } \overline{CD}$$

damit

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{y=k} = V \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{i(2m-1)\frac{\pi Z}{2c}} \cdot \frac{2a}{\pi} \cos \beta \cdot e^{-i\beta} t^{-2\beta/\pi} (1-t^2)^{\alpha/\pi + \beta/\pi - 1/2} \Big|_{y=k}$$

Beim Einsetzen der Koordinaten der Körperoberfläche gilt für den Abschnitt  $\overline{CD}$ :

$$s = 0, \quad 0 \leq r \leq 1; \quad \eta = 0, \quad c \leq \xi \leq 2c$$

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{y=k} = V \cdot \frac{2a}{\pi} \cos \beta e^{-i\beta} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{i(2m-1)\frac{\pi \xi}{2c}} r^{-2\beta/\pi} (1-r^2)^{\alpha/\pi + \beta/\pi - 1/2}$$

Man drückt zweckmäßigerweise  $r$  durch  $\xi$  aus: Aus Gleichung (13) folgt:

$$Z = \frac{2c}{\pi} \arcsin t + c \quad \Longrightarrow \quad t = -\cos\left(\frac{\pi Z}{2c}\right)$$

$$\text{daraus: } r = -\cos\left(\frac{\pi \xi}{2c}\right) \quad \text{auf } \overline{CD}$$

somit

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{y=k} = \frac{2aV}{\pi} \cos \beta \cdot [\cos \beta - i \sin \beta] \cdot \left(\cos \frac{\pi \xi}{2c}\right)^{-2\beta/\pi} \left(\sin \frac{\pi \xi}{2c}\right)^{2\alpha/\pi + 2\beta/\pi - 1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \left\{ \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] + i \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \right\}$$

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{y=k} = \frac{2aV}{\pi} \cos \beta \left(\cos \frac{\pi \xi}{2c}\right)^{-2\beta/\pi} \left(\sin \frac{\pi \xi}{2c}\right)^{2\alpha/\pi + 2\beta/\pi + 1}$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \cos \beta \cdot \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] - \sin \beta \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] + i \cos \beta \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] + i \sin \beta \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \right\}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Randbedingung (1) ein, so folgt:

$$V = V \cdot \frac{2a}{\pi} \cos \beta \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{-2\beta/\pi} \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\alpha/\pi + 2\beta/\pi - 1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \cos \beta \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] - \sin \beta \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] + \operatorname{tg} \beta \cos \beta \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] + \operatorname{tg} \beta \sin \beta \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \right\}$$

$$V = V \cdot \frac{2a}{\pi} \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{-2\beta/\pi} \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\alpha/\pi + 2\beta/\pi - 1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right]$$

Man kann dies Ergebnis umschreiben in:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] = \frac{\pi}{2a} \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\beta/\pi} \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{1 - \alpha/\pi - \beta/\pi}$$

Man hat also die rechte Seite der Gleichung im Bereich  $-2c \leq \xi \leq 2c$  in eine Fourierreihe zu entwickeln. Dabei treten nur ungerade Sinusfunktionen auf.

Für die Fourierkoeffizienten gilt dann:

$$b_m = \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2\beta/\pi} (\sin x)^{1 - 2\alpha/\pi - 2\beta/\pi} \cdot \sin \left[ (2m-1)x \right] dx \quad (16)$$

$$\text{mit } x = \frac{\pi \xi}{2c}$$

Es wird noch eingeführt:

$$M_m(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2\beta/\pi} (\sin x)^{1 - 2\alpha/\pi - 2\beta/\pi} \cdot \sin \left[ (2m-1)x \right] dx \quad (17)$$

Die Berechnung dieses Integrals wird im Anhang II behandelt. Es gilt für die gesuchte charakteristische Funktion.

$$4) \text{ Berecz. } W(Z) = -i \frac{2c}{\pi a} V \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \cdot e^{i(2m-1) \frac{\pi Z}{2c}} \quad (18)$$

4) Berechnung der hydrodynamischen Masse

Zur Berechnung der hydrodynamischen Masse  $M''$  gilt nach Lamb [8]:

$$2T = M'' V^2 = - \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (19)$$

Dieses Integral ist über die gesamte Berandung der Flüssigkeit zu erstrecken. Die freie Oberfläche des Wasserkeils  $\overline{AB}$  und  $\overline{DE}$  liefert jedoch keinen Beitrag zum Integral, weil hier  $\phi = 0$  ist. Die unendlich ferne Grenze des Wasserstrahls  $\overline{EA}$  liefert ebenfalls keinen Beitrag, weil entsprechend der Bedingung (1,6) hier sowohl  $\phi$  wie auch die Ableitung  $\partial \phi / \partial n$  verschwindet. Es gilt also:

$$M'' = - \frac{\rho}{V^2} \int_{\overline{BD}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

Aus geometrischen Überlegungen folgt für den Abschnitt  $\overline{CD}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \cos \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} - \sin \beta \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Benutzt man dazu die kinematische Oberflächenbedingung (3), so folgt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -V \cos \beta \quad (20)$$

Diese Bedingung gilt ebenfalls für den Abschnitt  $\overline{BC}$ .

Benutzt man noch, daß  $ds \cdot \cos \beta = dx$ , so folgt:

$$M'' = \frac{\rho}{V} \int_{-c}^{+c} \operatorname{Re}(W) \Big|_{\eta=k} dx$$

$$M'' = \frac{\rho}{V} \int_0^{2c} \operatorname{Re}(W(Z)) \Big|_{\eta=0} \cdot \frac{dx}{dr} \Big|_{\eta=k} \cdot \frac{dr}{d\xi} \Big|_{\eta=0} \cdot d\xi$$

Aus Gleichung (13) folgt:

$$\frac{dr}{d\xi} \Big|_{\eta=0} = \frac{\pi}{2c} \sin \frac{\pi \xi}{2c}$$

Aus Gleichung (9) folgt für die Körperkontur:

$$dx + i dy \Big|_{y=k} = \frac{c}{a \cos \beta} (-1)^{\beta/\pi} r^{2\beta/\pi} (1-r^2)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} dr$$

$$\frac{dx}{dr} \Big|_{y=k} = \frac{c}{a} \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\beta/\pi} \cdot \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{-2\alpha/\pi - 2\beta/\pi}$$

Es ist ferner:

$$\operatorname{Re}(w) \Big|_{\eta=0} = \frac{2c}{\pi a} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right]} \quad (21)$$

Somit ist:

$$M'' = \frac{2\rho c^2}{\pi a^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \int_0^{2c} \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\beta/\pi} \cdot \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{1-2\alpha/\pi - 2\beta/\pi} \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] d\xi$$

Wegen der Symmetrie des Integranden gilt auch hier:

$$M_m(\alpha, \beta) = \int_0^{2c} \left( \cos \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{2\beta/\pi} \cdot \left( \sin \frac{\pi \xi}{2c} \right)^{1-2\alpha/\pi - 2\beta/\pi} \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] d\xi$$

$$M'' = \frac{2\rho c^2}{\pi a^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^2(\alpha, \beta)}{2m-1} \quad (22)$$

Führt man den Koeffizienten K der hydrodynamischen Masse ein in der Form:

$$M'' = \frac{\pi \rho c^2}{2} \cdot K(\alpha, \beta) \quad (23)$$

so gilt:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2 a^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m^2(\alpha, \beta)}{2m-1} \quad (24)$$

5) Berechnung der Druckverteilung an der Wand

Aus der Linearisierung folgt für den Druck in der Flüssigkeit  $p = \rho \phi_t$ . Es wurde in Gleichung (21) für das Potential an der Wand bzw. an der Körperkontur abgeleitet:

$$\phi(z) \Big|_{\eta=0} = \frac{2c}{\pi a} V \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right]$$

Bei der partiellen Ableitung des Potentials nach der Zeit ist zu beachten, daß sowohl die Begegnungsgeschwindigkeit  $V$  als auch die benetzte Breite  $2c$  zeitabhängig sind. Somit gilt

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dt}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} p(\xi) \Big|_{\eta=0} &= \rho c \dot{V} \frac{2}{\pi a} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \\ &+ \rho \dot{c} V \frac{2}{\pi a} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \\ &- \rho \dot{c} V \frac{\xi}{ca} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi \xi}{2c} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Aus den Abbildungsfunktionen folgt für den Zusammenhang zwischen den Wandkoordinaten  $x, y$  und der Hilfskoordinate  $\xi$ :

$$\xi = \frac{2c}{\pi} \arcsin r + c \quad \text{auf } \overline{BCD} \quad (26)$$

und aus (10) folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c}{a} \int_0^r r^{2\beta/\pi} (1-r^2)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} dr \\ y &= (x-c) \cdot \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \text{auf } \overline{CD} \quad (27)$$

Für den Druck im Punkt C ( $\xi = c$ ) errechnet man:

$$\begin{aligned} p(\xi=c) \Big|_{\eta=0} &= \rho c \dot{V} \frac{2}{\pi a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \\ &+ \rho \dot{c} V \frac{2}{\pi a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{M_m(\alpha, \beta)}{2m-1} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Bestimmung von  $\delta$  und  $c$  aus den geometrischen Größen und dem Bewegungsablauf wird in den folgenden Abschnitten behandelt. In dem Sonderfall einer konstanten Relativgeschwindigkeit liefert nur der zweite Term von (28) einen Beitrag.

### 6) Berechnung der benetzten Breite

Die hier berechnete Benetzungskorrektur wurde von Wagner [13] in seiner grundlegenden Arbeit eingeführt. Dadurch sollen die Ergebnisse der linearisierten Theorie verbessert werden. Die systematische Linearisierung hatte das Ergebnis, daß die Randbedingungen am Körper und an der freien Oberfläche in der ursprünglichen Wasseroberfläche zu erfüllen sind. Durch den eindringenden Körper wird Flüssigkeit verdrängt. Es verformt sich dadurch die Flüssigkeitsoberfläche und vergrößert dadurch die Benetzung.

Die folgende Rechnung folgt ganz dem von Wagner [13] angegebenen Verfahren. Wir benutzen die kinematische Randbedingung der freien Oberfläche (vgl. 1,4)

$$\frac{DF}{Dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} F_x - \frac{\partial \phi}{\partial y} F_y + F_t = 0$$

dabei gilt auf  $\overline{DE}$ :  $y = -(x-c(t)) \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,  $F = y + (x-c) \cdot \operatorname{tg} \alpha$   
also folgt:

$$F_t = \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{auf } \overline{DE} \quad (29)$$

Aus der dynamischen Randbedingung  $\phi = 0$  an der freien Oberfläche folgt, daß die resultierende Geschwindigkeit an der Oberfläche die Richtung der Normalen haben muß, d.h.  $\partial \phi / \partial x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \partial \phi / \partial y$ .  
Damit folgt aus (29)

$$F_t = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{auf } \overline{DE} \quad (30)$$

Es ist jetzt zu beachten, daß bei der Bestimmung der charakteristischen Funktion (18) die Geschwindigkeit  $V$  als positiv angenommen wurde, wenn sich die Wand nach oben bewegt. Die Geschwindigkeit zwischen der Wand und der freien Oberfläche ist

$$-V + F_t$$

Führt man  $t$  als die Zeit ein, die seit der ersten Berührung der beiden Keilspitzen vergangen ist, so beträgt der Abstand in  $y$ -Richtung zwischen der Wand und der deformierten Oberfläche des Wasserkeils

$$\int_0^t \left\{ -v + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, \tilde{f}, t') \right\} dt'$$

Mit  $\tilde{f}$  soll die Ordinate der freien Strahlengrenze bezeichnet<sup>werden</sup>, an der die Geschwindigkeiten ~~und die~~ Annahme berechnet werden, daß der Strahl weiterhin durch gerade Begrenzungen angenähert werden darf. Die tatsächliche Grenze des Strahls erreicht die Wand an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t_x$ . Es muß gelten:

$$x (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = - \int_0^{t_x} \left\{ v - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, \tilde{f}, t') \right\} dt'$$

Es wird eine Hilfsfunktion  $u$  eingeführt, die gilt:

$$u = -v \frac{dt}{dc} \quad (31)$$

Damit kann man umschreiben:

$$x (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \int_0^x \left\{ v - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, \tilde{f}, t_c) \right\} \frac{u}{v} dc$$

Aus Ähnlichkeitsgründen muß im vorliegenden Falle  $u$  eine Konstante sein

$$x (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = u \left\{ x - \frac{1}{v \cdot \cos^2 \alpha} \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, \tilde{f}, t_c) dc \right\} \quad (32)$$

Es soll jedoch nicht die Konstante  $u$  berechnet werden, sondern der anschaulichere Wert  $c/c'$  (vgl. Diagramm 2)

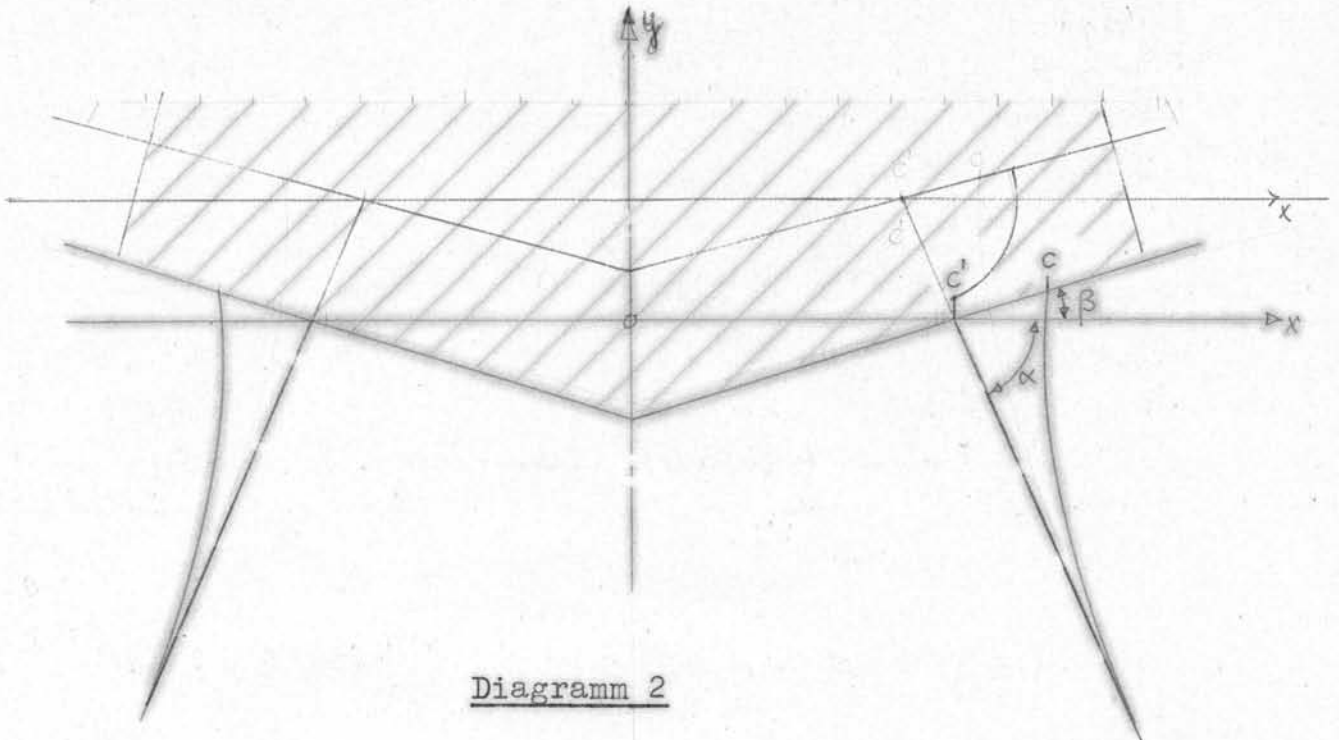


Diagramm 2

Durch Integration folgt aus Gleichung (32) für den Weg  $y = c'(tg\alpha + tg\beta)$ , den der Körper seit Beginn des Stoßes zurückgelegt hat:

$$y = u \cdot c$$

also:

$$\frac{c}{c'} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{u} = 1 - \frac{1}{x\sqrt{\cos^2\alpha}} \int_0^x \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, \tilde{f}, t_c) dc \quad (33)$$

Zur Berechnung des Integrals in (33) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, \tilde{f}) &= -\operatorname{Im} \left( \frac{dW}{dz} \right) \Big|_{y=\tilde{f}} \\ &= -\operatorname{Im} \left( \frac{dW}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \right) \Big|_{y=\tilde{f}} \end{aligned} \quad (34)$$

Im folgenden wird wie früher nur die rechte Systemhälfte, also der Abschnitt  $\overline{DE}$  betrachtet.

Für diesen Abschnitt gilt  $y = \tilde{f}$

$$r > 1, \quad s = 0 \quad ; \quad \xi = 2c, \quad \eta < 0 \quad (35)$$

Aus (18) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} \Big|_{y=\tilde{f}} &= \frac{V}{a} \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) e^{i(2m-1)\frac{\pi}{2c}(2c+i\eta)} \\ &= -\frac{V}{a} \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) e^{-(2m-1)\frac{\pi\eta}{2c}} \end{aligned} \quad (36)$$

Man errechnet aus Gleichung (12)

$$\frac{dz}{dt} \Big|_{y=\tilde{f}} = -i \frac{2c}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = -i \frac{2c}{\pi} (r^2-1)^{-1/2} \quad (37)$$

Schließlich folgt aus Gleichung (9)

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dz} \Big|_{y=\tilde{f}} &= (-1)^{\alpha/\pi} \cdot \frac{a \cos \beta}{c} t^{-2\beta/\pi} (t^2-1)^{\alpha/\pi + \beta/\pi} \\ &= [\cos \alpha + i \sin \alpha] \frac{a \cos \beta}{c} r^{-2\beta/\pi} (r^2-1)^{\alpha/\pi + \beta/\pi} \end{aligned} \quad (38)$$

Setzt man (36), (37) und (38) in (34) ein, so folgt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{y=\tilde{f}} = -\frac{2V}{\pi} \cos \alpha \cos \beta \cdot r^{-2\beta/\pi} (r^2-1)^{\alpha/\pi + \beta/\pi - 1/2} \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) e^{-(2m-1)\frac{\pi\eta}{2c}}$$

Man drückt zweckmäßigerweise  $\eta$  auch noch durch  $r$  aus:

$$r = -\cos\left(\pi + i \frac{\pi\eta}{2c}\right) = \cosh\left(\frac{\pi\eta}{2c}\right)$$

dann ist:

$$\begin{aligned} e^{-(2m-1)\frac{\pi\eta}{2c}} &= \left( \cosh \frac{\pi\eta}{2c} - \sinh \frac{\pi\eta}{2c} \right)^{2m-1} \\ &= \left( r - \sqrt{r^2-1} \right)^{2m-1} \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{y=\tilde{f}} &= -\frac{2V}{\pi} \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot r^{-2\beta/\pi} (r^2-1)^{\alpha/\pi + \beta/\pi} \left( \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} - 1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) \left[ r - \sqrt{r^2-1} \right]^{2m-2} \end{aligned} \quad (39)$$

Zur Berechnung des Integrals in Gleichung (33) muß man jetzt  $r$  durch  $x$  ersetzen, oder aber, was einfacher ist, die Integration in der  $t$ -Ebene vornehmen. Dazu ist der Zusammenhang zwischen  $dc$  und  $dr$  nötig. Es gilt nach Gleichung (9) wie vorne:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (-1)^{\beta/\pi} \frac{c}{a \cos \beta} t^{2\beta/\pi} (t^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} (-1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \\ &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) \frac{c}{a \cos \beta} t^{2\beta/\pi} (t^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \end{aligned}$$

Auf dem Abschnitt  $\overline{DE}$  ist:

$$t = r > 1, \quad z = x + iy$$

$$\frac{dx + idy}{dr} = (\cos \alpha - i \sin \alpha) \frac{c}{a \cos \beta} r^{2\beta/\pi} (r^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi}$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{c \cos \alpha}{a \cos \beta} r^{2\beta/\pi} (r^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi}$$

$$x = \int_0^x dx = \frac{c \cos \alpha}{a \cos \beta} \int_0^r u^{2\beta/\pi} (u^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} du$$

Dabei ist leicht zu zeigen, daß

$$\frac{c \cos \alpha}{a \cos \beta} \int_0^1 u^{2\beta/\pi} (u^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} du = c$$

also:

$$x = c + \frac{c \cos \alpha}{a \cos \beta} \int_1^r u^{2\beta/\pi} (u^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} du$$

dies löst man nach  $c$  auf und erhält schließlich

$$dc = \frac{-x \cdot \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot r^{2\beta/\pi} (r^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} dr}{\left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \int_1^r u^{2\beta/\pi} (u^2 - 1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} du \right]^2} \quad (40)$$

Damit läßt sich das Integral in (33) berechnen, bei den Grenzen ist zu beachten, daß

$$\text{für } c = 0; \quad u = \infty$$

$$\text{für } c = x; \quad u = 1$$

$$\frac{c}{c'} = 1 - \frac{2}{\pi a} \int_0^1 \frac{\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} - 1\right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) [r - \sqrt{r^2-1}]^{2m-2}}{\left[1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \int_1^r u^{2\beta/\pi} (u^2-1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} \cdot du\right]^2} dr$$

Man kann schließlich schreiben:

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{2}{\pi a} \sum_{m=1}^{\infty} M_m(\alpha, \beta) \cdot I_m(\alpha, \beta) \quad (41)$$

wenn man einführt:

$$I_m(\alpha, \beta) = - \int_0^1 \frac{\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} - 1\right) [r - \sqrt{r^2-1}]^{2m-2} dr}{\left[1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \int_1^r u^{2\beta/\pi} (u^2-1)^{-\alpha/\pi - \beta/\pi} du\right]^2} \quad (42)$$

Die weitere Behandlung des Integrals  $I_m(\alpha, \beta)$  ist im Anhang III beschrieben.

### 7) Ergebnisse des Rechenprogramms

Die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse  $K(\alpha, \beta)$  und die Benetzungskorrektur  $(c/c')(\alpha, \beta)$  wurden nach den Gleichungen (24) und (41) berechnet. Bei der Erstellung des ALGOL-Programms wurden die in den Anhängen II und III entwickelten Ansätze benutzt. Das ALGOL-Programm ist im Anhang IV niedergegeben. In der Rechnung müssen die unendlichen Reihen nach einem höchsten Glied mit der Nummer  $m = M$  abgebrochen werden. Diese Schranke mußte vor der Rechnung festgelegt werden. Die doppelten Quadraturen zur Berechnung der Integrale  $I_m$  benutzen die Simpson-Regel mit äquidistanten Schrittweiten. Bei der Berechnung des inneren Integrals in Gleichung (42) (der Funktion  $F(\varphi, \alpha, \beta)$ , vgl. Anhang III) werden  $N$  Einzelschnitte benutzt. Dies durch das Integral definierte Integral ist dann an jeder zweiten Stützstelle bekannt. Daher erfolgt die zweite Integration, die als Integral  $I_m$  liefert, in  $N/2$  Einzelschnitten.

Die Beispielrechnungen zeigten, daß der Einfluß der Stützstellenzahl  $N$  auf die Genauigkeit der Rechnung nicht bedeutend ist ( $N$  beeinflusst nur das Ergebnis  $c/c'$ ). Es sind praktisch keine Änderungen der Ergebnisse festzustellen, wenn  $N$  größer ist als 100. Es wurde daraufhin mit  $N = 200$  gerechnet.

Dagegen ist die Rechnung, und zwar besonders die Rechnung für die Benetzungskorrektur  $c/c'$ , besonders empfindlich gegen die Festlegung der Schranke  $M$ . Dies gilt in besonderem Maße, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  größere Werte annehmen. In den Diagrammen 3 und 4 sind die Ergebnisse für  $c/c'$  und  $K$  gegenübergestellt, die mit  $M = 20$  und  $M = 35$  errechnet wurden. Eine weitere Steigerung des Rechenaufwandes über  $M = 35$  hinaus war nicht möglich, weil dann die Berechnung der Integrale  $M_m(\alpha, \beta)$  mit der gewählten Summendarstellung versagte. Da die Ansätze im Sinne der systematischen Linearisierung nur für verschwindende Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gelten, und weil der Stoß nur bei kleinen Keilwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  besonders stark ist, sind die Einschränkungen für größere Keilwinkel nicht einschneidend.

Die Ergebnisse der Rechnung mit  $N = 200$  und  $M = 35$  wurden noch einmal in den Diagrammen 5 und 6 dargestellt. Diese beiden Diagramme sind auch in die Veröffentlichung des Verfassers [10] aufgenommen worden.

Für den Spezialfall  $\alpha = 0$  (ursprünglich ebene Wasseroberfläche) stimmen die  $K$ -Werte mit den bekannten Koeffizienten für Rhomben überein. Die Ergebnisse für die Benetzungskorrektur  $(c/c')$  ( $0, \beta$ ) stimmen mit den von Fabula [5] und Ferdinande [6] errechneten Werten überein, sie weichen von den Ergebnissen von Monaghan [11] und Bisplinghoff und Doherty [2], die untereinander übereinstimmen, wesentlich ab.

Die  $K$ -Werte sinken für steigende Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  ab, und zwar schneller für Änderungen von  $\beta$  als für Änderungen von  $\alpha$ . Die  $(c/c')$ -Werte zeigen für wachsende Werte von  $\beta$  eine sinkende Tendenz, für wachsende Werte von  $\alpha$  dagegen eine steigende Tendenz, zumindest im Bereich größerer  $\beta$ -Werte. Diese steigende Tendenz der Benetzungskorrektur  $c/c'$  mit wachsenden Werten von  $\alpha$  wird die Rechnungen von Cumberbatch [4] qualitativ bestätigt.

### 8) ~~Schlußbemerkung~~

~~In der vorliegenden Arbeit wurde die systematisch linearisierte Theorie des hydrodynamischen Stoßes auch auf den Fall des Stoßes eines Wa~~

### 8) Schlußbemerkung

In der vorliegenden Arbeit wurde die systematisch linearisierte Theorie des hydrodynamischen Stoßes auch auf den Fall des Stoßes eines Wasserkeils gegen einen Keilkörper bzw. eine keilförmige Wand bei größeren Keilwinkeln angewendet. In diesem Falle ist die Linearisierung im strengen Sinne nicht mehr gültig. Die Ergebnisse sind aber zumindest in ihren Tendenzen wertvoll. Es wurden numerisch Ergebnisse für die Benetzungskorrektur  $c/c'$  und den Koeffizienten  $K$  der hydrodynamischen Masse berechnet.

Die Untersuchung wurde im Rahmen eines Forschungsauftrages des Bundesministers der Verteidigung im Institut für Schiffbau der Universität Hamburg unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Georg Weinblum durchgeführt.

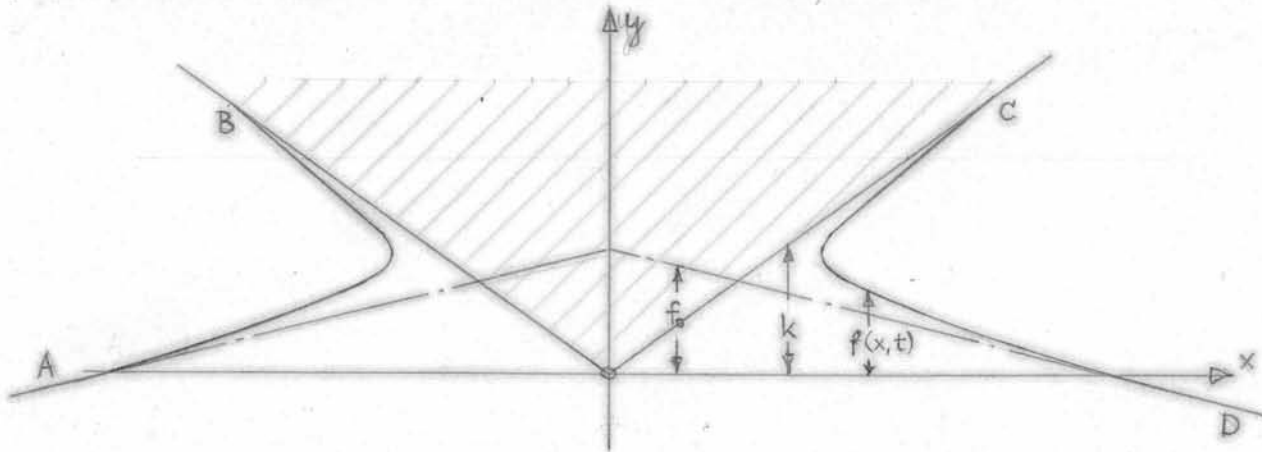
### 9) Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz und I.A. Stegun: "Handbook of mathematical functions", National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55 (1964)
- [2] R.L. Bisplinghoff und C.S. Doherty: "Some studies of the impact of vee wedges on a water surface", Journ. of the Franklin Institute 235 (1952), p. 547-561
- [3] E.P. Borissowa, P.P. Korjawow und N.N. Moissejew: "Ebene und rotationssymmetrische automodellierte (ähnliche) Probleme des Eintauchens und des Stoßes eines Strahls (russisch)", Prikl. Mat. i Mekh. 23 (1959), p. 347-360
- [4] E. Cumberbatch: "The impact of a water wedge on a wall", Journ. of Fluid Mechanics 713 (1960), p. 353-374
- [5] A.G. Fabula: "Ellipse-fitting approximation of two-dimensional normal symmetric impact of rigid bodies on water", Proc. 5th Mid-western Conf. on Fluid Mech., Ann Arbor 1957, p. 299-315
- [6] V. Ferdinande: "Theoretical considerations on the penetration of a wedge into the water", Intern. Shipb. Progr. 13 (1966), p. 102-116
- [7] Th. v. Karman: "The impact on seaplane floats during landing", NACA TN 321 (1929)
- [8] H. Lamb: "Hydrodynamics", Dover Publications, New York, Sixth Edition (1932)
- [9] M.I. Lawrentjew, M.W. Keldysch, A.I. Markoetsewitsch, L.I. Sedow und A.B. Lotow: "Gesammelte Arbeiten über das Problem des Stoßes auf die Wasseroberfläche (russisch)", Trudy ZAGI, Bericht 152 (1935)

- [10] W.K. Meyerhoff: "Übersicht über grundlegende theoretische und experimentelle Arbeiten zum Problem der Bodenschläge bei Schiffen", Vorbereitet als Vortrag vor der Hauptversammlung der STG 1967
- [11] R.J. Monaghan: "A theoretical examination of the effect of deadrise on wetted area and associated mass in sea-plane-water impact", Aero. Res. Council, London, R & M 2681 (1952)
- [12] I.M. Ryshik und I.S. Gradstein: "Summen-, Produkt- und Integraltafeln", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957
- [13] H. Wagner: "Über Stoß- und Gleitvorgänge in der Oberfläche von Flüssigkeiten", ZAMM 12 (1932), p. 193-215
- [14] J.V. Wehausen und E.V. Laitone: "Surface waves", Handbuch der Physik, Bd. IX, p. 446 ff., Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960

Anhang ILinearisierung der Gleichungen, die den Stoß eines Wasserkeils gegen eine keilförmige Wand beschreiben.1) Beschreibung des Problems

Bei der jetzt schon "klassischen" Formulierung des Stoßproblems setzt man voraus, daß die Flüssigkeit vor dem Stoß ruht und daß sich darüber Vakuum befindet. Es wird außerdem vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit reibungsfrei, inkompressibel, schwerlos und ohne Oberflächenspannung ist.

Figur I.1

(Vorzeichenfestsetzung wie bei Wehausen & Laitone [14])

Feldbedingung:

Es existiert ein Geschwindigkeitspotential  $\phi(x,y,t)$ , das die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(x,y,t) = 0 \quad (1,1)$$

in der gesamten Flüssigkeit erfüllt. Bezeichnet man mit  $t = 0$  den Zeitpunkt, wo die Keilspitze das Wasser berührt, so gilt die Anfangsbedingung:

$$\phi(x,y,t < 0) = 0 \quad (1,2)$$

in der gesamten Flüssigkeit.

Randbedingung an der Körperoberfläche  $\overline{BC}$ :

Die Körperoberfläche ist gegeben durch die Gleichung  $y = k(x,t)$  bzw. durch  $K(x,y,t) = y - k(x,t) = 0$ . Die Lage der Punkte B und C

und damit das Ausmaß der Benetzung ist im voraus nicht bekannt. Es gilt die Bedingung

$$\frac{DK}{Dt}(x, y, t) = 0 \quad \text{auf } K=0 \quad (1,3)$$

Randbedingungen an der freien Flüssigkeitsoberfläche  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ :

Die freie Oberfläche ist durch die Gleichung  $y = f(x, t)$  bzw. durch  $F(x, y, t) = y - f(x, t) = 0$  gegeben. Es gilt die kinematische Oberflächenbedingung:

$$\frac{DF}{Dt}(x, y, t) = 0 \quad \text{auf } F=0 \quad (1,4)$$

und die dynamische Oberflächenbedingung:

$$p_0 = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1,5)$$

Zusätzliche Bedingung: Die vorstehenden Gleichungen reichen nicht aus, um das Problem wohldefiniert zu machen. Man benötigt noch eine zusätzliche Bedingung, die im allgemeinen eine Ausstrahlungsbedingung ist. Im vorliegenden Falle haben wir ein Anfangsproblem, das aus der Ruhe erregt wird, es gilt

$$\phi(x, y, t) = 0, \quad \text{für } r = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty \quad (1,6)$$

Aus den gegebenen Bedingungen lassen sich für die tatsächliche Lösung des Problems noch weitere Bedingungen ableiten, die aber für die weiteren Betrachtungen nicht notwendig sind. Es sind dies besondere Anwendungen der Kontinuitätsbedingung und Aussagen über die Länge der freien Oberfläche.

## 2) Systematische Linearisierung

Bei der systematischen Linearisierung bei Problemen mit einer freien Oberfläche geht man im allgemeinen davon aus, daß alle vorkommenden Größen, die die Störung beschreiben, nach einem Parameter  $\epsilon$  zu entwickeln sind. Dieser Parameter  $\epsilon$  ist so gewählt, daß alle Störungen verschwinden, wenn der Parameter verschwindet. Der besonders interessante Fall beim hydrodynamischen Stoß ist aber der Stoß von stumpfen Körpern gegen einen stumpfen Wasserkeil. Hier erfüllt der Parameter nicht die obige Bedingung. Man wählt zweckmäßigerweise als Parameter der Entwicklungen den Neigungswinkel der Körperoberfläche gegenüber der Normalen zur Bewegungs-

richtung, oder den Winkel zwischen der Körperoberfläche und der ungestörten Flüssigkeitsoberfläche. Dies erfordert aber besondere Maßnahmen bei der Linearisierung.

*groß 0*  
*groß 0*  
Setzt man voraus, daß die Geschwindigkeiten und die Stoßkörperabmessungen die Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  erhalten, so folgt daraus, daß die Abstände zwischen dem Körper und der Flüssigkeitsoberfläche im Augenblick des ersten Kontakts, die Eintauchung des Körper während der Stoßphase, die Erhebungen der freien Oberfläche während der Stoßphase sowie die Dauer der Stoßphase von der Größenordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  sein müssen. Bei der gewählten "klassischen" Formulierung des Stoßproblems, die eine inkompressible Flüssigkeit und Vakuum außerhalb der Flüssigkeit voraussetzt, muß dann bei verschwindendem  $\epsilon$  die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit im Augenblick <sup>des Kontakts</sup> eine unstetige Änderung erfahren. Der Druck wächst dabei über alle Schranken. Diese Tendenzen müssen bei den Ansätzen berücksichtigt werden.

Insbesondere enthalten partielle Ableitungen nach der Zeit eine versteckte Division durch den Parameter  $\epsilon$ . Damit dies beim späteren Sortieren der Reihen berücksichtigt werden kann, wird folgende Substitution eingeführt:

$$t = \epsilon \cdot T \quad \text{und somit:} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial T} \quad (1,7)$$

Es erscheint dann auch zweckmäßig, für den Druck  $p$  eine entsprechende Substitution vorzunehmen

$$p = \frac{1}{\epsilon} P \quad (1,8)$$

Im übrigen lehnt sich die folgende Ableitung eng an das schon oben zitierte Kapitel von Wehausen & Laitone [14] an. Es werden folgende Reihenansätze gemacht:

$$\mathbf{v}(x, y, t, \epsilon) = \mathbf{v}^{(0)}(x, y, t) + \epsilon \mathbf{v}^{(1)}(x, y, t) + \dots \quad (1,9)$$

$$f(x, y, t, \epsilon) = \epsilon f^{(1)}(x, y, t) + \epsilon^2 f^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad (1,10)$$

$$k(x, y, t, \epsilon) = \epsilon k^{(1)}(x, y, t) + \epsilon^2 k^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad (1,11)$$

$$P(x, y, t, \epsilon) = P^{(0)}(x, y, t) + \epsilon P^{(1)}(x, y, t) + \dots \quad (1,12)$$

In Übereinstimmung mit dem Ansatz (1.9) gilt für das Geschwindigkeitspotential:

$$\phi(x, y, t, \epsilon) = \phi^{(0)}(x, y, t) + \epsilon \phi^{(1)}(x, y, t) + \dots \quad (1,13)$$

für die partielle Ableitung nach T gilt:

$$\phi_T(x, y, t, \varepsilon) = \phi_T^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \phi_T^{(1)}(x, y, t) + \dots \quad (1.14)$$

An der freien Oberfläche  $y = f(x, t)$  gilt die folgende formale Entwicklung

$$\begin{aligned} u(x, f, t, \varepsilon) &= u(x, 0, t, \varepsilon) + f \cdot u_{yy}(x, 0, t, \varepsilon) + \dots \\ &= u^{(0)}(x, 0, t) + \\ &\quad + \varepsilon \cdot \{ u^{(1)}(x, 0, t) + f^{(1)} \cdot u_y^{(0)}(x, 0, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Entsprechende Entwicklungen gelten für die andere Geschwindigkeitskomponente  $v(x, f, t, \varepsilon)$  sowie für  $\phi_T(x, f, t, \varepsilon)$ . Eine analoge Entwicklung gilt außerdem für die Komponenten der Geschwindigkeit an der Körperoberfläche  $y = k(x, t)$ .

Die obigen Entwicklungen werden in die Gleichungen (1.1) bis (1.6) eingesetzt.

Laplace-Gleichung:

$$\nabla^2 \phi^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \cdot \nabla^2 \phi^{(1)}(x, y, t) + \dots \equiv 0 \quad (1.16)$$

Kinematische Randbedingung an der Körperoberfläche:

Es gilt:  $K(x, y, t) = y - k(x, t) = 0$

$$K_x = -k_x \quad , \quad K_t = -k_t = -\frac{1}{\varepsilon} k_T$$

$$K_y = 1$$

Dann:

$$\frac{DK}{Dt} = 0 = u \cdot K_x + v \cdot K_y + K_t$$

$$\begin{aligned} 0 &= - \left\{ u^{(0)}(x, 0, t) + \varepsilon [u^{(1)}(x, 0, t) + k^{(1)} \cdot u_y^{(0)}(x, 0, t)] + \dots \right\} + \\ &\quad + (\varepsilon k_x^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 k_x^{(2)}(x, t) + \dots) \\ &\quad + \left\{ v^{(0)}(x, 0, t) + \varepsilon [v^{(1)}(x, 0, t) + k^{(1)} \cdot v_y^{(0)}(x, 0, t)] + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon k_T^{(0)}(x, t) + \varepsilon^2 k_T^{(2)}(x, t) + \dots) \end{aligned}$$

$$0 = v^{(0)}(x, 0, t) - k_T^{(1)}(x, t) \quad (1.17)$$

$$+ \varepsilon \{ -u^{(0)}(x, 0, t) \cdot k_x^{(1)}(x, t) + v^{(1)}(x, 0, t) + k^{(1)}(x, t) \cdot v_y^{(0)}(x, 0, t) \}$$

Kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche: Auf entsprechende Weise erhält man aus  $DF/Dt = 0$ :

$$0 = v^{(0)}(x, 0, t) - f_T^{(1)}(x, t) + \varepsilon \left\{ -u^{(0)}(x, 0, t) \cdot f_x^{(1)}(x, t) + v^{(0)}(x, 0, t) + f^{(1)}(x, t) \cdot v_y^{(0)}(x, 0, t) - f_T^{(2)}(x, t) \right\} + \dots \quad (1.18)$$

Bernoulli-Gleichung: Die Bernoulli-Gleichung muß genau wie die übrigen Gleichungen in die systematische Linearisierung eingeschlossen sein:

$$\phi_t + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{\rho} \cdot p$$

Man setzt ein:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \phi_T^{(0)}(x, y, t) + \phi_T^{(1)}(x, y, t) + \dots \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left\{ u^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon u^{(1)}(x, y, t) + \dots \right\}^2 + \left\{ v^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon v^{(1)}(x, y, t) + \dots \right\}^2 \right] = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon P^{(1)}(x, y, t) + \dots \right\} \\ & \frac{1}{\varepsilon} \phi_T^{(0)}(x, y, t) + \phi_T^{(1)}(x, y, t) + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}^{(0)}(x, y, t) \right]^2 + \dots = \quad (1.19) \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho} P^{(0)}(x, y, t) + \frac{1}{\rho} P^{(1)}(x, y, t) + \dots \end{aligned}$$

Dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \phi_T^{(0)}(x, 0, t) + \varepsilon \left[ \phi_T^{(1)}(x, 0, t) + f^{(1)}(x, t) \cdot \phi_{Ty}^{(0)}(x, 0, t) + \dots \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left\{ u^{(0)}(x, 0, t) + \varepsilon \left[ u^{(1)}(x, 0, t) + f^{(1)}(x, t) \cdot u_y^{(0)}(x, 0, t) \right] + \dots \right\}^2 \right. \\ & \left. + \left\{ v^{(0)}(x, 0, t) + \varepsilon \left[ v^{(1)}(x, 0, t) + f^{(1)}(x, t) \cdot v_y^{(0)}(x, 0, t) \right] + \dots \right\}^2 \right] = \\ & = \frac{1}{\rho \varepsilon} \cdot \left[ P_0^{(0)} + \varepsilon P_0^{(1)} + \dots \right] \\ & \frac{1}{\varepsilon} \phi_T^{(0)}(x, 0, t) + \phi_T^{(1)}(x, 0, t) + f^{(1)} \phi_{Ty}^{(0)}(x, 0, t) + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}^{(0)}(x, 0, t) \right]^2 + \dots = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho} P_0^{(0)} + \frac{1}{\rho} P_0^{(1)} + \dots \quad (1.20) \end{aligned}$$

Anfangs- und Ausstrahlungsbedingung: Man erhält durch Einsetzen von (1.13):

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(x, y, t < 0) + \varepsilon \cdot \phi^{(1)}(x, y, t < 0) + \dots &= 0 & (1.21) \\ \phi^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \phi^{(1)}(x, y, t) + \dots &= 0 \\ &\text{für } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das Sammeln der wichtigsten Terme erfordert eine gewisse Vorsicht. Es wurde zu Anfang der Kunstgriff mit der Substitution von T und P vorgenommen, um deutlich zu machen, daß partielle Ableitungen nach der Zeit t eine höhere Größenordnung haben als die nichtdifferenzierten Funktionen. Diese Substitution muß man jetzt beim Sortieren nach Potenzen von  $\varepsilon$  rückgängig gemacht werden.

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^{(0)}(x, y, t) &\equiv 0 \\ \phi^{(0)}(x, y, t) &= 0, \text{ für } t < 0 \\ \varrho \phi_t^{(0)}(x, y, t) &= p^{(0)}(x, y, t) \\ v^{(0)}(x, 0, t) &= k_t^{(1)}(x, t), \text{ am Körper } |x| \leq c \\ v^{(0)}(x, 0, t) &= f_t^{(1)}(x, t), \text{ an der freien} \\ &\text{Oberfläche } |x| > c \\ \varrho \phi_t^{(0)}(x, 0, t) &= p_0^{(0)} = 0 \quad \text{"} \\ \phi(x, y, t) &= 0 \quad \text{für } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

An der freien Oberfläche gilt die sehr einfache Bedingung  $\phi_t^{(0)} = 0$ , die in der Ebene  $y = 0$  zu erfüllen ist. Die kinematische Bedingung  $v^{(0)}(x, 0, t) = f_t(x, t)$  wird zur Bestimmung der Strömung nicht benötigt. Da vor dem Stoß  $t < 0$ , das Potential überall in der Flüssigkeit verschwindet, folgt aus  $\phi_t = 0$  auch

$$\phi(x, 0, t) = 0$$

Diese Bedingung erlaubt eine einfache analytische Fortsetzung über die x-Achse in die obere Halbebene.

Anhang IIBerechnung der Integrale  $M_m(\alpha, \beta)$ 

Ein allgemeiner Lösungsausdruck für das Integral in Gleichung (17) ist bisher nicht festzustellen gewesen. Im Prinzip müßte das Integral numerisch zu behandeln sein. Dieser Weg soll hier nicht beschritten werden, obwohl leicht gezeigt werden kann, daß der Integrand keine Polstellen besitzt, auch nicht im Grenzfall  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Die Berechnung des Integrals soll hier durch einen Summenansatz erfolgen. Und zwar wird der Term  $\sin[(2m-1)x]$  entwickelt:

$$\sin[(2m-1)x] = \sum_{t=1}^m (-1)^{t+1} \binom{2m-1}{2t-1} (\sin x)^{2t-1} (\cos x)^{2m-2t}$$

Damit gilt:

$$M_m(\alpha, \beta) = 2 \sum_{t=1}^m (-1)^{t+1} \binom{2m-1}{2t-1} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2t-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} (\cos x)^{2m-2t+2\beta/\pi} dx$$

Das Integral kann mit Hilfe der Gamma-Funktion (vgl. z.B. Ryshik-Gradstein [12]:  $\Sigma \Pi$ -Tafeln, p.159) gelöst werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2t-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} (\cos x)^{2m-2t+2\beta/\pi} dx &= \\ &= \frac{\Gamma(t+1/2 - \alpha/\pi - \beta/\pi) \cdot \Gamma(m-t+1/2 + \beta/\pi)}{2\Gamma(m+1 - \alpha/\pi)} \end{aligned}$$

benutzt man außerdem, daß

$$\binom{2m-1}{2t-1} = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(2t) \cdot \Gamma(2m-2t+1)}$$

so folgt:

$$M_m(\alpha, \beta) = \sum_{t=1}^m (-1)^{t+1} \frac{\Gamma(2m) \cdot \Gamma(t+1/2 - \alpha/\pi - \beta/\pi) \cdot \Gamma(m-t+1/2 + \beta/\pi)}{\Gamma(2t) \cdot \Gamma(2m-2t+1) \cdot \Gamma(m+1 - \alpha/\pi)}$$

II.2

Die Berechnung der Reihenglieder erfolgt zweckmäßigerweise rekursiv:

$$M_m(\alpha, \beta) = \sum_{t=1}^m \Delta_t(m, \alpha, \beta)$$

wobei

$$\Delta_1(m, \alpha, \beta) = \frac{(2m-1) \Gamma(3/2 - \alpha/\kappa - \beta/\kappa) \cdot \Gamma(m - 1/2 + \beta/\kappa)}{\Gamma(m + 1 - \alpha/\kappa)}$$

$$\Delta_t(m, \alpha, \beta) = (-1)^{t-1} \frac{(m+1-t)(m+1/2-t)(t-1/2 - \alpha/\kappa - \beta/\kappa)}{(t-1)(t-1/2)(m+1/2 + \beta/\kappa - t)} \Delta_{t-1}(m, \alpha, \beta)$$

Die Berechnung der Summe ist sehr günstig, wenn infolge der Konvergenz der Reihen (24), (28) und (41) nur kleine Werte  $m$  vorkommen. Bei sehr großen Werten  $m$  versagt diese Rechnung.

Anhang IIIBerechnung der Integrale  $I_m(\alpha, \beta)$ 

Zur Berechnung der Integrale  $I_m(\alpha, \beta)$  findet sich kein anderer Weg als die numerische Integration. Es wird zunächst eine Substitution vorgenommen, und zwar:

$$r = \frac{1}{u}$$

Damit gilt:

$$I_m(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) \left( \frac{1 - \sqrt{1-u^2}}{u} \right)^{2m-2} du}{x^2 \left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \int_x^1 u^{2\alpha/\pi-2} (1-u^2)^{-\alpha/\pi-\beta/\pi} du \right]^2}$$

Substituiert man weiter:

$$u = \sin \varphi$$

so ist:

$$I_m(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos \varphi) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]^{2m-2} d\varphi}{\left[ \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \int_{\varphi}^{\pi/2} (\sin \psi)^{2\alpha/\pi-2} (\cos \psi)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} d\psi \right\} \right]^2}$$

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$F(\varphi, \alpha, \beta) = \int_{\varphi}^{\pi/2} (\sin \psi)^{2\alpha/\pi-2} (\cos \psi)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} d\psi$$

$$G(\varphi, \alpha, \beta) = \left[ \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} F(\varphi, \alpha, \beta) \right\} \right]^2$$

dann ist:

$$I_m(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} G(\varphi, \alpha, \beta) (1 - \cos \varphi) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]^{2m-2} d\varphi$$

III.2

Wir betrachten zunächst die Eigenschaften der Funktion  $F(\varphi, \alpha, \beta)$ , und zwar zunächst den Fall  $\varphi \rightarrow 0$ . Wir können aufteilen

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} F(\varphi, \alpha, \beta) = F(\varepsilon, \alpha, \beta) + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\varphi}^{\varepsilon} \frac{(\cos \psi)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{(\sin \psi)^{2-2\alpha/\pi}} d\psi$$

wenn man setzt:  $\varepsilon \ll \pi/2$ ,  $\varepsilon > \varphi$  und festgehalten.

Es gilt dann:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} F(\varphi, \alpha, \beta) = F(\varepsilon, \alpha, \beta) + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\varphi}^{\varepsilon} \psi^{2\alpha/\pi-2} d\psi$$

Schließt man den Grenzfall  $\alpha = \pi/2$  aus, der hier nicht besonders wichtig ist, so folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} F(\varphi, \alpha, \beta) &= F(\varepsilon, \alpha, \beta) + \frac{\varepsilon^{2\alpha/\pi-1}}{2\alpha/\pi-1} - \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi^{2\alpha/\pi-1}}{2\alpha/\pi-1} \\ &= \tilde{F}(\varepsilon, \alpha, \beta) + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi^{2\alpha/\pi-1}}{1-2\alpha/\pi} \end{aligned}$$

wenn

$$\tilde{F}(\varepsilon, \alpha, \beta) = F(\varepsilon, \alpha, \beta) + \frac{\varepsilon^{2\alpha/\pi-1}}{2\alpha/\pi-1}$$

Im anderen Grenzfall  $\varphi \rightarrow \pi/2$  ist der Grenzwert des Integrals

$$F(\pi/2, \alpha, \beta) = 0$$

Der Integrand der Funktion  $F$  muß in der Nähe von  $\varphi = \pi/2$  noch näher betrachtet werden, da der Exponent  $(1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi)$  auch negativ werden kann, Wir teilen wieder auf:

$$F(\varphi, \alpha, \beta) = F_{\varepsilon}(\varphi, \alpha, \beta) + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \frac{(\cos \psi)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{(\sin \psi)^{2\alpha/\pi-2}} d\psi$$

$$\text{wenn } F_{\varepsilon}(\varphi, \alpha, \beta) = \int_{\varphi}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{(\cos \psi)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{(\sin \psi)^{2\alpha/\pi-2}} d\psi$$

und  $\varepsilon \ll \pi/2$ .

dann gilt weiter: mit  $\delta = \pi/2 - \varphi$

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, \alpha, \beta) &= F_E(\varphi, \alpha, \beta) + \int_0^E \frac{(\sin \delta)^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{(\cos \delta)^{2-2\alpha/\pi}} d\delta \\
 &\approx F_E(\varphi, \alpha, \beta) + \int_0^E \delta^{1-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} d\delta \\
 &\approx F_E(\varphi, \alpha, \beta) + \frac{E^{2-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{2-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gültig, wenn man den nicht sehr wichtigen Grenzfall, in dem gleichzeitig  $\alpha = \beta = \pi/2$ , ausschließt. Es ist damit gezeigt, daß die Funktion  $F$ , außer für  $\alpha = \beta = \pi/2$ , zu bestimmen ist, wenn man die oben entwickelte Form benutzt.

Wir betrachten jetzt die Grenzwerte der Funktion  $G(\varphi, \alpha, \beta)$ , und zwar zunächst für  $\varphi \rightarrow 0$ . Wir können schreiben:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \rightarrow 0} G(\varphi, \alpha, \beta) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[ \sin \varphi + \sin \varphi \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} F(\varphi, \alpha, \beta) \right]^{-2} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[ \varphi + \varphi \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \tilde{F}(\varepsilon, \alpha, \beta) + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \frac{\varphi^{2\alpha/\pi}}{1-2\alpha/\pi} \right]^{-2} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1-2\alpha/\pi) a \cos \beta}{\cos \alpha} \right\}^2 \varphi^{-4\alpha/\pi} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{a \cos \beta}{\cos \alpha} + \tilde{F}(\varepsilon, \alpha, \beta) \right) \cdot \varphi^{1-2\alpha/\pi} \right]^{-2} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1-2\alpha/\pi) a \cos \beta}{\cos \alpha} \right\}^2 \cdot \varphi^{-4\alpha/\pi} \\
 &\quad \text{wenn } \alpha \neq \pi/2
 \end{aligned}$$

Im anderen Grenzfall  $\varphi \rightarrow \pi/2$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} G(\varphi, \alpha, \beta) &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{a \cos \beta} \frac{(\pi/2 - \varphi)^{2-2\alpha/\pi-2\beta/\pi}}{2-2\alpha/\pi-2\beta/\pi} \right]^{-2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

wird.  
wenn der Grenzfall  $\alpha = \beta = \pi/2$  wie schon früher ausgeschlossen würde.

Somit kann man jetzt die Grenzwerte des Integranden für  $I_m$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} G(\varphi, \alpha, \beta) (1 - \cos \varphi) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]^{2m-2} &= \\ &\approx \left[ \frac{(1 - 2\alpha/\pi) a \cos \beta}{\cos \alpha} \right]^2 \varphi^{-4\alpha/\pi} \left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2}\right) \left[ \frac{1 - 1 + \varphi^2/2}{\varphi} \right]^{2m-2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - 2\alpha/\pi) a \cos \beta}{\cos \alpha} \right]^2 \varphi^{2-4\alpha/\pi} \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2m-2} \\ &= 0 \quad \text{für } m > 1 \text{ oder } \alpha < \pi/2. \end{aligned}$$

Für den Grenzfall  $m \neq 1$  und  $\alpha = \pi/2$ , der durch die früheren Einschränkungen nicht ausgeschlossen ist, verschwindet der konstante Faktor

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - 2\alpha/\pi) a \cos \beta}{\cos \alpha} \right]^2 = 0$$

Der Grenzwert ist also in jedem Falle

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} G(\varphi, \alpha, \beta) (1 - \cos \varphi) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]^{2m-2} = 0$$

Der andere Grenzwert ist leicht zu bestimmen

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} G(\varphi, \alpha, \beta) (1 - \cos \varphi) \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right]^{2m-2} = 1$$

Damit ist gezeigt, daß die Berechnung der Integrale  $I_m(\alpha, \beta)$  ohne Schwierigkeiten durch Quadraturen erfolgen kann, wenn die beiden vorstehenden Grenzwerte und die Entwicklung des Integrals  $F$  in der Nähe des Punktes  $\psi = \pi/2$  benutzt wird. Diese Entwicklung ist unbedingt erforderlich für den Fall, daß  $\alpha + \beta \geq \pi/2$ . Für den Fall, daß  $\alpha + \beta < \pi/2$  ist, kann diese Form nicht schaden.

Anhang IVAlgol - Programm

```

'BEGIN' 'COMMENT' PROGRAMM ZUR BERECHNUNG DES KOEFFIZIENTEN DER
HYDRODYNAMISCHEN MASSE K UND DES KOEFFIZIENTEN
DER BENETZTEN BREITE C/C' FUER DEN STOSS EINES
WASSERKEILS (ALPHA) GEGEN EINEN STARREN KEIL-
KOERPER (BETA) .,
'REAL' A, B, ALPHA, BETA, C, MA, MM, SUM1, SUM2, Z1, Z2, Z3 .,
'INTEGER' I, J, M, N, T, X, Y .,
'REAL' 'PROCEDURE' GAMMA ., 'CODE' .,
'PROCEDURE' SCHALTER ., 'CODE' .,

MARKE.1..
READ (X) .,
'IF' X 'EQUAL' 0 'THEN' 'GOTO' ENDE 'ELSE'
READ (Y, Z1, Z2, Z3, M, N) .,
'BEGIN'
'ARRAY' IM (1..M) .,

'REAL' 'PROCEDURE' M VON M (M, ALPHA, BETA) .,
'VALUE' ALPHA, BETA, M .,
'REAL' ALPHA, BETA .,
'INTEGER' M .,
'BEGIN' 'COMMENT' BERECHNUNG DER INTEGRALE MM VON ALPHA DURCH
PI UND BETA DURCH PI, DIESE PROZEDUR SETZT DIE
'REAL' 'PROCEDURE' GAMMA VORAUS .,

'REAL' DELTA, F1, SUM .,
'INTEGER' S, T .,
F1 = GAMMA(0.5 + BETA) / GAMMA(2 - ALPHA) .,
'IF' M 'NOTEQUAL' 1 'THEN'
  'FOR' S = 2 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
    F1 = F1 * (S - 1.5 + BETA) / (S - ALPHA) .,
  SUM = DELTA = (2*M - 1) * GAMMA(1.5 - ALPHA - BETA) * F1 .,
  'FOR' T = 2 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
    'BEGIN'
    DELTA = DELTA * (M - T + 1) * (M - T + 0.5) * (t.

```

## IV.2

```

DELTA = - DELTA * (M - T + 1) * (M - T + 0.5) * (T
        - 0.5 - ALPHA - BETA) / ((T - 1) * (T - 0.5)
        * (M - T + 0.5 + BETA)) .,
SUM = SUM + DELTA .,
'END' .,
M VON M = SUM .,
'END' ENDE DER PROZEDUR M VON M .,

'PROCEDURE' ALLE I VON M (M, ALPHA, BETA, N) RESULT..(IM) .,
'VALUE' ALPHA, BETA, M, N .,
'REAL' ALPHA, BETA .,
'INTEGER' M, N .,
'ARRAY' IM .,
'BEGIN' 'COMMENT' NUMERISCHE BERECHNUNG DER INTEGRALE IM VON
        ALPHA/PI UND BETA/PI VON DER ERSTEN ORDNUNG
        BIS ZUR M-TEN ORDNUNG, N GIBT DIE ZAHL DER
        STUETZSTELLEN FUER DIE SIMPSONINTEGRATION AN,
        N MUSS DURCH 4 TEILBAR SEIN, DIE 'REAL' 'PRO-
        CEDURE' GAMMA WIRD VORAUSGESETZT .,
'REAL' A, B, DELTAPHI, KO, PHI, SUM .,
'INTEGER' I, T .,
'ARRAY' ARG, COSINUS, F, G, H, SINUS (0..N) .,
DELTAPHI = 1.57079632 / N .,
KO = 2 * COS(3.14159265 * ALPHA) * GAMMA(1.5 - ALPHA) /
      (COS(3.14159265 * BETA) * GAMMA (0.5 + BETA) *
      GAMMA (1 - ALPHA - BETA)) .,
PHI = 0 .,
'FOR' I = 1 'STEP' 1 'UNTIL' NN 'DO'
  'BEGIN'
    PHI = PHI + DELTAPHI .,
    SINUS(I) = SIN(PHI) .,
    COSINUS(I) = COS(PHI) .,
    ARG(I) = EXP((1 - 2 * ALPHA - 2 * BETA) * LN(COSINUS(I)))
            * EXP((-2 + 2 * ALPHA) * LN(SINUS(I))) .,
  'END' .,
F(N) = 0 .,
G(N) = 1 .,
G(0) = 0 .,

```

```

F(N-2) = EXP((2 - 2 * ALPHA - 2 * BETA) * LN(2 * DELTAPHI)) /
      (2 - 2 * ALPHA - 2 * BETA) .,
A = SINUS(N-2) * (1 + KO * F(N-2)) .,
G(N-2) = (1 - COSINUS(N-2)) / (A * A) .,
'FOR' I = 4 'STEP' -2 'UNTIL' 2 'DO'
  'BEGIN'
  F(I) = F(I+2) + DELTAPHI/3 * (ARG(I+2) + 4 * ARG(I+1)
    + ARG(I)) .,
  A = SINUS(I) * (1 + KO * F(I)) .,
  G(I) = (1 - COSINUS(I)) / (A * A) .,
  'END' .,
H(0) = 0 .,
'FOR' I = 2 'STEP' 2 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN'
  B = (1 - COSINUS(I)) / SINUS(I) .,
  H(I) = B * B .,
  'END' .,
'FOR' T = 1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
  'BEGIN'
  SUM = 0 .,
  'FOR' I = 0 'STEP' 4 'UNTIL' N-4 'DO'
    SUM = SUM + G(I) + 4 * G(I+2) + G(I+4) .,
  IM(T) = 0.6666666667 * DELTAPHI * SUM .,
  'FOR' I = 0 'STEP' 2 'UNTIL' N 'DO'
    G(I) = G(I) * H(I) .,
  'END' .,
'END' ENDE DER PROZEDUR ALLE I VON M .,

OUTPUT (1, 'KOEFFIZIENTEN K UND C/C' FUER DEN STOSS EINES'',
      '' WASSERKEILS GEGEN EINEN STARREN KEILKÖRPER'') .,
LINE (1, 1) .,
FORMAT (1, '0000'') .,
OUTPUT (1, 'RECHENAUFWAND..'') , '' N ='', N, '' ( ZAHL ''
      ''DER SIMPSONINTERVALLE )'' .,
OUTPUT (1, '' '' M ='', M, '' (ZAHN ''
      ''DER REIHENGLIEDER )''') .,

MARKE 2..
'FOR' I = Z1 'STEP' 1 'UNTIL' X 'DO'

```

```

'BEGIN'
LINE (1, 1) ↓?
ALPHA = 0.5 * I / X .,
'FOR' J = Z2 'STEP' 1 'UNTIL' Y 'DO'
  'BEGIN'
  BETA = 0.5 * J / Y .,
  'IF' I 'EQUAL' X 'AND' J 'EQUAL' Y 'THEN'
    'BEGIN'
    MA = 0 .,
    C = 1 ↓?
    'GOTO' MARKE 3 .,
    'END' .,
  'ELSE'
  A = GAMMA(0.5 + BETA) * GAMMA (1 - ALPHA - BETA) /
    (2 * GAMMA(1.5 - ALPHA)) .,
  B = 1157079632 * A .,
  'IF' J 'EQUAL' Y 'THEN'
    'FOR' T = 1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO' IM(T) = 0
  'ELSE'
  ALLE I VON M ( M, ALPHA, BETA, N) RESULT..(IM) .,
  SUM 1 = SUM 2 = 0 .,
  'FOR' T = 1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
    'BEGIN'
    MM = M VON M (T, ALPHA, BETA) .,
    SUM 1 = MM * MM / (2 * T - 1) + SUM 1 .,
    SUM 2 = MM * IM(T) + SUM 2 .,
    'END' .,
  MA = SUM 1 / (B * B) .,
  C = 1 + SUM 2 / B .,

  MARKE 3..
  FORMAT (1, '000', '000', '0.0000', '0!0000',
    '0.000000', '0.000000') .,
  OUTPUT (1, 'I = ', I, ' ', ' ', 'J = ', J, ' ', ' ',
    ' ', 'ALPHA/PI = ', ALPHA, ' ', ' ',
    'BETA/PI = ', BETA, ' ? ', ' ',
    'K = ', MA, ' ', ' ', 'C/C' = ', C) .,
  SCHALTER ( ENDE 2 ) .,
  'END' .,
Z2 = Z3 .,

```

```

'END' ..
'END' ..
'GOTO' MARKE 1 ..
ENDE 2 ..
OUTPUT (1, 'RECHNUNG MIT WAHLSCHALTER ABGEBROCHEN') ..
'GOTO' ENDE 3 ..

ENDE..
OUTPUT (1, 'ENDE') ..
ENDE 3..
'COMMENT'
'COMMENT'          EINGABEDATEN ..
                    X = ZAHL DER ALPHAWERTE ,
                    Y = ZAHL DER BETAWERTE ,
                    Z1 = NUMMER I DES ERSTEN ALPHAWERTS ,
                    Z2 = NUMMER J DES ERSTEN BETAWERTS ,
                    Z3 = NUMMER J DES NIEDRIGSTEN BETAWERTS
                        (IST FAST IMMER GLEICH NULL) ,
                    M = ZAHL DER SUMMENGLIEDER ,
                    N = ZAHL DER INTEGRATIONSSCHRITTE
                        (MUSS DURCH 4 TEILBAR SEIN) ,
                    AM ENDE DER DATEN MUSS EINE NULL STEHEN ..

'END' ..

```

Anhang VBewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen, die die hier berechneten Koeffizienten benutzen, lassen sich besonders einfach ableiten, weil das Konzept der hydrodynamischen Masse in Verbindung mit dem Impulssatz angewendet werden kann. Es wird vereinfachend vorausgesetzt, daß außer den linearisierten hydrodynamischen Kräften keine weiteren Kräfte wirken. Diese Voraussetzung ist bei dem Stoß stumpfer Keile im allgemeinen gerechtfertigt.

Wir setzen weiterhin voraus, daß die Masse des festen Keils bzw. der keilförmigen Wand den Wert  $M$  hat und daß der Wasserkeil in großer Entfernung von der Wand eine konstante Geschwindigkeit hat. Man kann dann das Bezugssystem so wählen, daß in ihm der Wasserkeil ruht.  $V$  ist die Geschwindigkeit zwischen den beiden Keilen,  $V_0$  ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Keilen vor dem Stoß.

Es gilt nach dem Impulssatz:

$$\frac{d}{dt} V (M + M'') = 0$$

daraus folgt:

$$V = \frac{V_0}{1 + M''/M}$$

Führt man die Ableitung durch, so folgt:

$$(M + M'') \dot{V} + \frac{dM''}{dt} V = 0$$

$$\dot{V} = - \frac{dM''}{dt} \frac{V}{M + M''}$$

Für die hydrodynamische Masse gilt:

$$M'' = (c/c')^2 k \cdot \frac{\pi \rho c'^2}{2}$$

$$\frac{dM''}{dt} = (c/c')^2 k \cdot \pi \rho c' \frac{dc'}{dt}$$

V.2

wobei

$$\frac{dc'}{dt} = \frac{v}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \quad (5.1)$$

Damit ergibt sich für die Stoßkraft auf den Keilkörper:

$$P = -M\dot{v} = (c/c')^2 \cdot K \cdot \frac{\pi \rho c' \cdot v_0^2}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (1 + M''/M)^3} \quad (5.2)$$

Die genaue Druckverteilung wurde im Abschnitt 5) behandelt. Für den mittleren bezogenen Druck ergibt sich:

$$\frac{P}{\rho c v^2} = (c/c') \cdot K \cdot \frac{\pi}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (1 + M''/M)} \quad (5.3)$$

Durch Integration von Gleichung (5.3) folgt für die Zeit t:

$$t = c' \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{v_0} \left\{ 1 + M''/3M \right\} \quad (5.4)$$

Für den Sonderfall, daß der Keilkörper unbeweglich ist ( $M = \infty$ ), folgt:

$$P = -M\dot{v} = (c/c')^2 \cdot K \cdot \frac{\pi \rho c' v_0^2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \quad (5.5)$$

$$\frac{P}{\rho c v^2} = (c/c') \cdot K \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \quad (5.6)$$

$$t = \frac{c' (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{v_0} \quad (5.7)$$

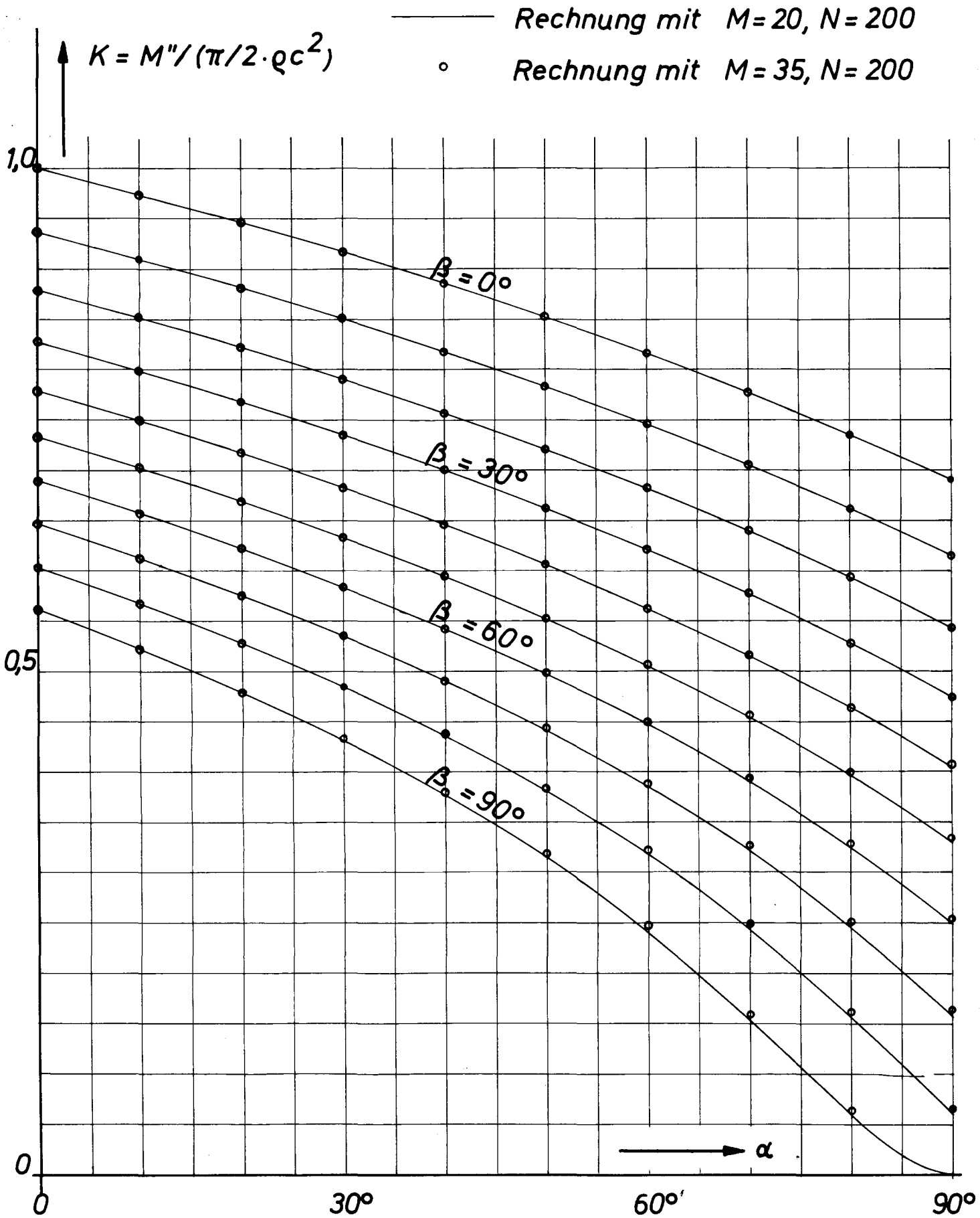


Diagramm 3: Koeffizient der hydrodynamischen Masse  $K(\alpha, \beta)$

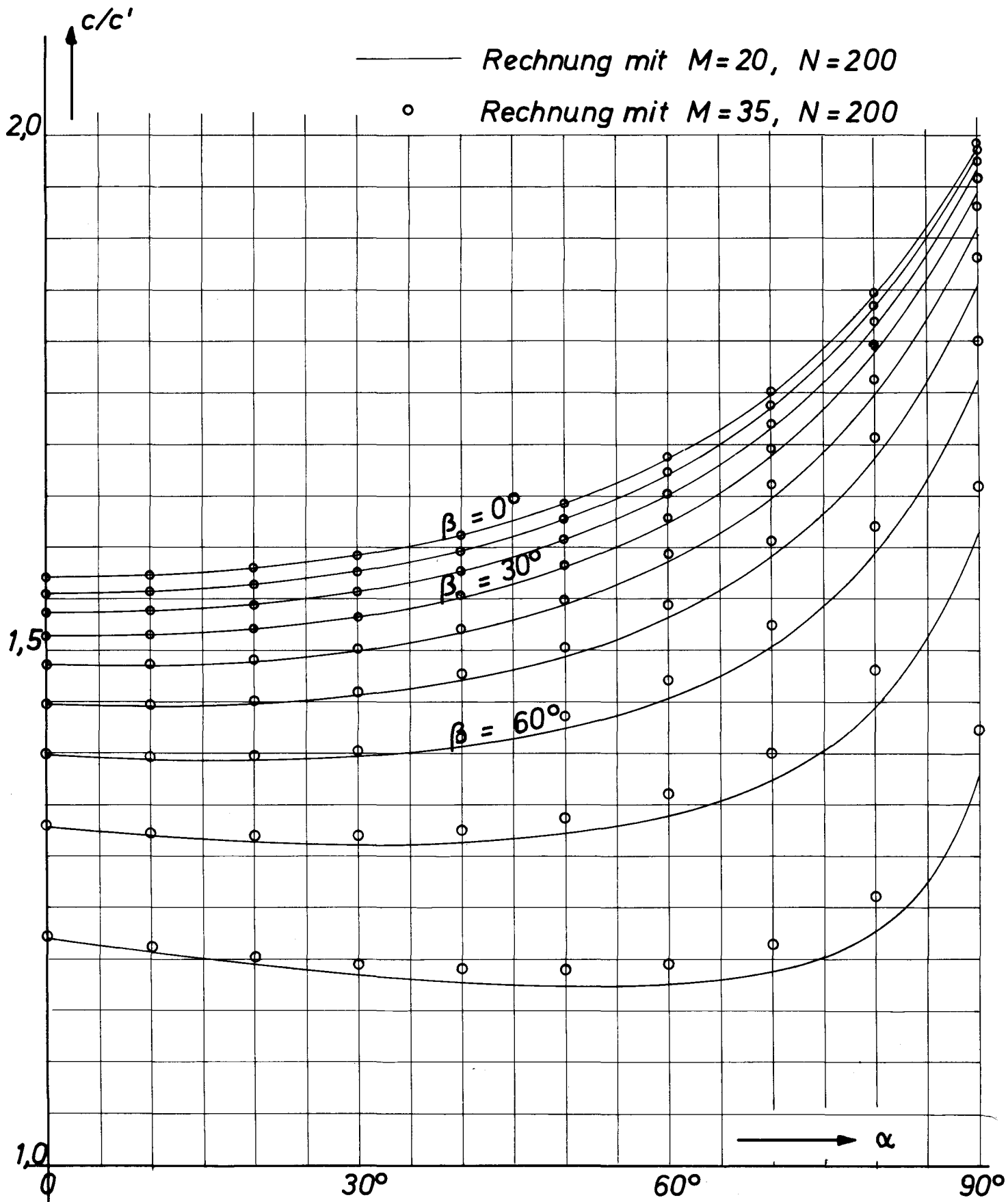


Diagramm 4: Benetzungskorrektur  $c/c'(\alpha, \beta)$

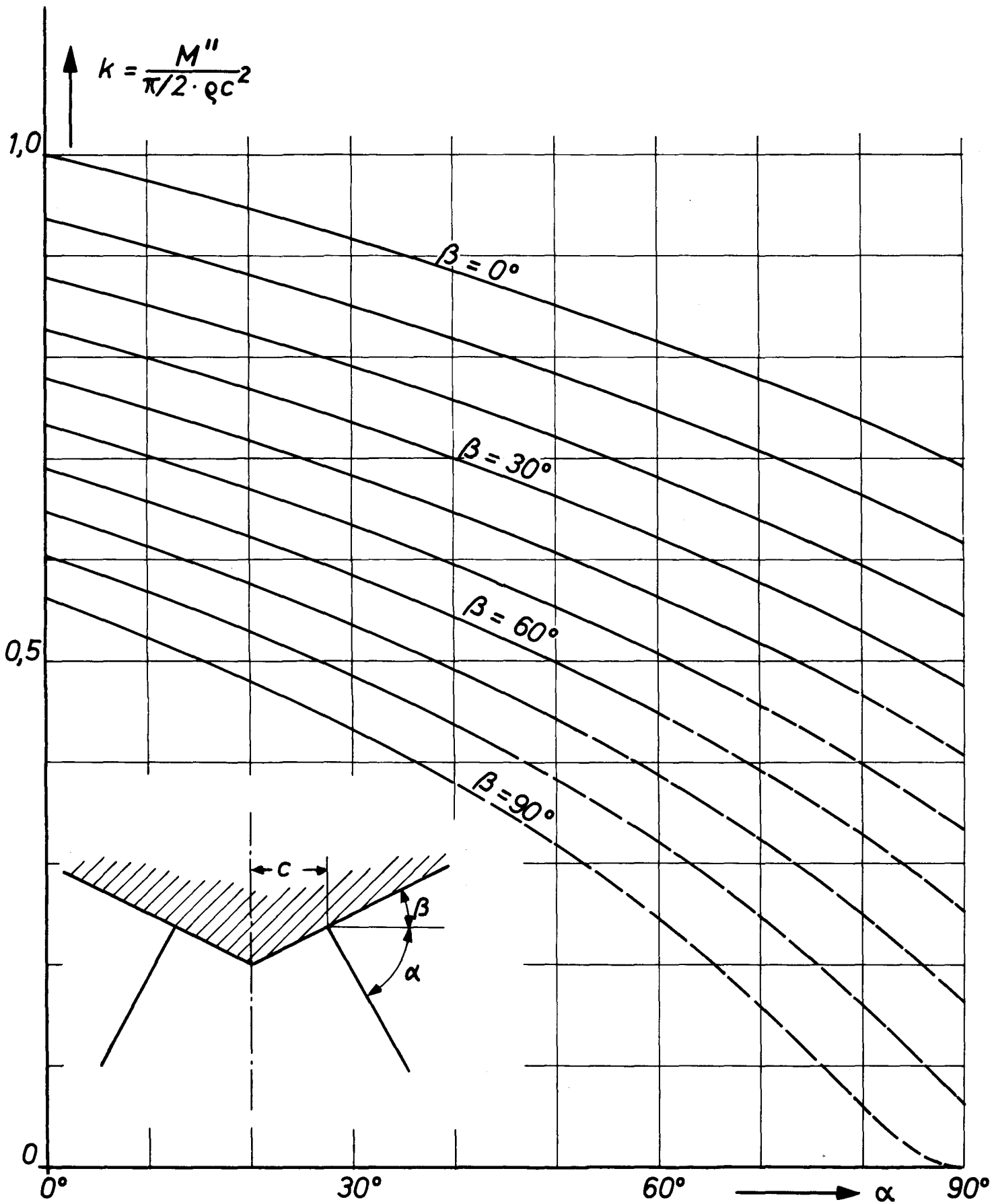


Diagramm 5: Koeffizient der hydrodynamischen Masse  $K(\alpha, \beta)$

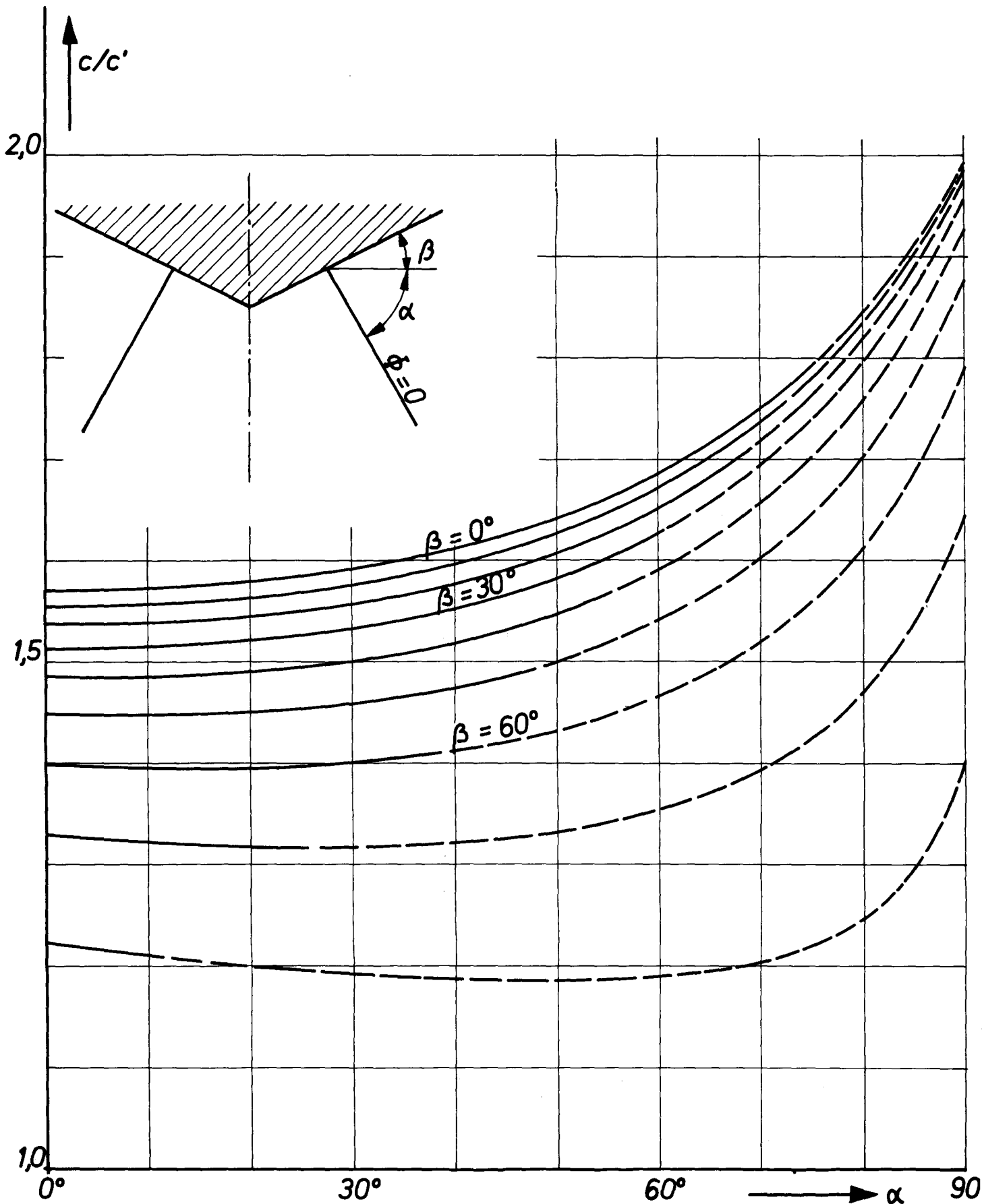


Diagramm 6: Benetzungskorrektur  $c/c'$  ( $\alpha, \beta$ )