

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 208

Potentialtheoretische Berechnung der hydrodynamischen  
Massen für dünne Rechteckplatten

W. Kay Meyerhoff

Hamburg, Mai 1968

Inhaltsübersicht:

1. Einleitung
2. Verzeichnis der benutzten Symbole
3. Ansatz zur Darstellung der Strömung
4. Verfahren zur Berechnung der Einflußgrößen
5. Beispiele für vereinfachte Darstellung
6. Erstellung des Rechenprogramms
7. Allgemeine Eigenschaften des Verfahrens
8. Darstellung der Ergebnisse
9. Zusammenfassung
10. Literaturverzeichnis

Anhang I: Algol - Programm

Anhang II: Vergleichswerte für Ellipsenplatten

1. Einleitung

Es soll die Potentialströmung um eine quer zu ihrer Ebene bewegte Rechteckplatte bestimmt werden, um damit dann die hydrodynamische Masse und die Verteilung der instationären Drücke auf der Platte berechnen zu können. Die Potentialströmung liefert im allgemeinen eine gute Näherung für die tatsächliche hydrodynamische Masse. Obwohl die rechteckige Platte ein sehr einfacher geometrischer Körper ist, ist offenbar bisher keine theoretische Berechnung der hydrodynamischen Masse hierfür erfolgt. Dem Verfasser sind lediglich zwei experimentelle Untersuchungen bekannt geworden, in denen hydrodynamische Massen von dünnen Rechteckplatten bestimmt wurden.

Pabst (1930)<sup>8</sup> hat für vier verschiedene Rechteckplatten die hydrodynamische Masse durch Schwingungen mit kleiner Amplitude ermittelt. Die Platten hatten die Abmessungen:  $10 \times 10$ ,  $10 \times 20$ ,  $10 \times 30$  und  $10 \times 40$  cm<sup>2</sup> bei einer Dicke von 3 mm. Sie wurden quer an das Ende eines vertikalen Stabes angesetzt, der infolge seiner Aufhängung an Federelementen Oszillationen in sei-

ner Achsenrichtung ausführen konnte. Die Eigenfrequenzen dieses Systems betragen zwischen 30 und 100 Hz. Die Eigenfrequenzen wurden durch Ausschwingversuche in Luft und etwa 45 cm tief getaucht in Wasser bestimmt. Die daraus ermittelten hydrodynamischen Massen werden hier zu Vergleichen benutzt.

Yu (1945)<sup>12</sup> hat unabhängig von den Untersuchungen von Pabst für drei verschiedene Rechteckplatten sowie für eine Reihe von Parallelepipeds die hydrodynamischen Massen durch kleine Schwingungen bestimmt. Die Platten bestanden aus Bleiblech von 1,5 mm Dicke und hatten die Abmessungen:  $4 \times 5$ ,  $6 \times 5$  und  $8 \times 5$  cm<sup>2</sup>. Es wurden jeweils zwei gleiche Platten an einem Torsionspendel aufgehängt. Die Eigenfrequenzen des Systems betragen etwa zwischen 0,1 und 0,3 Hz bei den verschiedenen Platten. Die Messungen mit den Platten geringer aber endlicher Dicke wurden von Yu nach den Erfahrungen mit den Parallelepipeds für den Grenzfall verschwindender Dicke korrigiert. Auch diese Meßergebnisse werden später zu Vergleichen herangezogen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Potentialströmung für die querbewegte Rechteckplatte mit Hilfe einer Singularitätenbelegung auf der Platte dargestellt. Für das Problem der Platte bietet sich eine Belegung mit Dipolen an, wobei man zudem den Vorteil hat, daß besonders einfache Beziehungen zwischen der Belegung und den instationären Druckanteilen bestehen. Für die Dipolbelegung wird ein Ansatz in der Form einer Doppelsumme gemacht. Die Funktionen dieses Ansatzes sind aus dem ebenen Problem übernommen. Die Randbedingung für die Strömungsgeschwindigkeiten an der Platte wird punktweise erfüllt. Auf diese Weise wird die Bestimmung der Koeffizienten für die Belegung auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Die numerische Berechnung der Integrale für die Einflußgrößen erfolgt mit Hilfe eines besonders hierfür angepaßten Verfahrens, das die spezielle Form der Integranden berücksichtigt und dadurch eine sehr Genauigkeit erlaubt.

Die Eigenschaften des Lösungsansatzes werden an Hand von Beispielrechnungen eingehend untersucht und erläutert.

Für eine Reihe von Platten mit Seitenverhältnissen zwischen 0,1 und 1 wurden Rechnungen auf der Rechenanlage des Rechenzentrums der Universität Hamburg durchgeführt. Die errechneten Dipolbelegungen bzw. die ihr proportionalen instationären Druckanteile bei beschleunigter Bewegung sind in Tabellen angegeben und graphisch dargestellt worden. Außerdem zeigen Zusammenstellungen die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse, die Ordinate der Dipolbelegung in der Plattenmitte, die Völligkeit der Dipolbelegung sowie die mittlere Ordinate der Dipolbelegung. Diese Werte werden mit den Meßergebnissen von Pabst und von Yu sowie mit den theoretischen Werten für elliptische Platten verglichen.

## 2. Verzeichnis der benutzten Symbole

$a_{ik}(\kappa)$	Koeffizienten des Reihenansatzes für die Belegung
A	Konstante
$A_{ik}(\kappa)$	dimensionslose Koeffizienten des Reihenansatzes
$A_2$	Konstante
B	halbe Breite der Rechteckplatte (y-Richtung)
$b_{ik}(\kappa)$	Koeffizienten zur Darstellung der Beschleunigung
$B_{ik}(\kappa)$	dimensionslose Koeffizienten für die Beschleunigung
$C(\kappa)$	Koeffizient der hydrodynamischen Masse (Gl. (35))
$C_0(\kappa)$	Koeffizient der hydrodyn. Masse der Ellipsenplatte
$D_n$	Hilfsintegral (Gl. (32))
$f_{ik}$	Integrandfunktion (Gl. (60))
$F_i(x)$	Funktionen des Belegungsansatzes (Gl. (8))
FP	'endlicher Teil' des Integrals im Sinne von Hadamard
H	Parameter für die Größe der Teilflächen
i	Index
$I_{ik}$	Hilfsintegrale (Gl. (12))
$J_{ik}$	Einflußfunktionen (Gl. (13a-d))
k	Index
K	Zahl der Punkte, an denen die Randbedingung erfüllt wird
L	halbe Länge der Platte (x-Richtung)

$m(x,y)$	Dipoldichte auf der Rechteckplatte
$m_o(x,y)$	Dipoldichte auf der Ellipsenplatte
$M$	Zahl der Glieder im Reihenansatz in $x$ -Richtung
$M(x,y)$	dimensionslose Dipoldichte auf der Rechteckplatte
$M_o(x,y)$	dimensionslose Dipoldichte auf der Ellipsenplatte
$M(o,o)$	Mittelordinate (max. Ordinate) der dimensionslosen Dipoldichte der Rechteckplatte
$M_o(o,o)$	Mittelordinate (max. Ordinate) der dimensionslosen Dipoldichte der Ellipsenplatte
$\bar{M}$	Mittelwert der dimensionslosen Dipole der Rechteckplatte
$\bar{M}_o$	Mittelwert der dimensionslosen Dipole der Ellipsenplatte
$M''(\kappa)$	hydrodynamische Masse der Rechteckplatte
$M''_o(\kappa)$	hydrodynamische Masse der Ellipsenplatte
$n$	Index
$N$	Zahl der Glieder im Reihenansatz in $y$ -Richtung
$p_i(x,y)$	instationärer Anteil der Druckverteilung
$P_i$	resultierende instationäre Kraft auf die Platte
$r$	Abstand des betrachteten Punktes von der Singularität
$r$	Index
$R_{ik}$	Teil des Integrals $I_{ik}$ über den Rest der Platte (Gl.(40))
$s$	Index
$S_{ik}$	Teil des Integrals $I_{ik}$ über das kleine Quadrat mit der Singularität (Gl. (39))
$t$	Hilfsvariable
$T(r,s,\Delta)$	Hilfsintegral (Gl.(48))
$T_k(x)$	Tschebyscheff-Polynom 1. Art $k$ -ter Ordnung
$u$	Hilfsvariable
$U_k(x)$	Tschebyscheff-Polynom 2. Art $k$ -ter Ordnung (Gl. (9))
$U_k^{(r)}(x)$	$r$ -te Ableitung des Polynoms $U_k(x)$ nach $x$
$v$	Hilfsvariable
$v_z$	$z$ -Komponente der induzierten Geschwindigkeit
$V$	Translationsgeschwindigkeit der Platte
$\dot{V}$	Translationsbeschleunigung der Platte
$x$	Koordinate
$X$	dimensionslose Koordinate (Gl. (45))
$X_k$	dimensionslose Koordinate des Mittelpunkts einer Teilfläche
$y$	Koordinate

$Y$	dimensionslose Koordinate (Gl. (45))
$Y_k$	dimensionslose Koordinate des Mittelpunkts einer Teilfläche
$z$	Koordinate
$Z$	dimensionslose Koordinate (Gl. (45))
$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$	- Konstante
$\delta$	halbe Seitenlänge des Quadrats um die Singularität
$\Delta$	dimensionslose halbe Seitenlänge des Quadrats (Gl. (45))
$\Delta R_{ik}$	Beitrag einer Teilfläche zum Integral $R_{ik}$
$\Delta X_k$	dimensionslose halbe Seitenlänge einer Teilfläche (x-Richtung)
$\Delta X_{\max}$	dimensionslose maximale halbe Seitenlänge der Teilflächen (x- und y-Richtung)
$\Delta Y_k$	dimensionslose halbe Seitenlänge einer Teilfläche (y-Richtung)
$\xi$	z-Koordinate der Singularität
$\eta$	y-Koordinate der Singularität
$H$	dimensionslose Koordinate (Gl. (45))
$\kappa$	Seitenverhältnis der Rechteckplatte (Gl. (46)), bzw. Verhältnis der Achsen der Ellipsenplatte
$\kappa'$	Hilfsgröße (Gl. (A.1))
$\xi$	x-Koordinate der Singularität
$\Xi$	dimensionslose Koordinate (Gl. (45))
$\rho$	Dichte der Flüssigkeit
$\varphi$	Hilfsvariable
$\varphi(x, y, z)$	Grundlösung der Laplace-Gleichung
$\varphi(\kappa)$	Völligkeit der Dipolbelegung der Rechteckplatte (Gl. (36))
$\varphi_0(\kappa)$	Völligkeit der Dipolbelegung der elliptischen Platte (Gl. (A.6))
$\phi$	Geschwindigkeits-Potential der Rechteckplatte
$\phi_0$	Geschwindigkeits-Potential der Ellipsenplatte
$\psi$	Hilfsvariable

### 3. Ansatz zur Darstellung der Strömung

Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Potentialströmung um eine Rechteckplatte der Breite  $2B$  und der Länge  $2L$  (vgl. Dia-

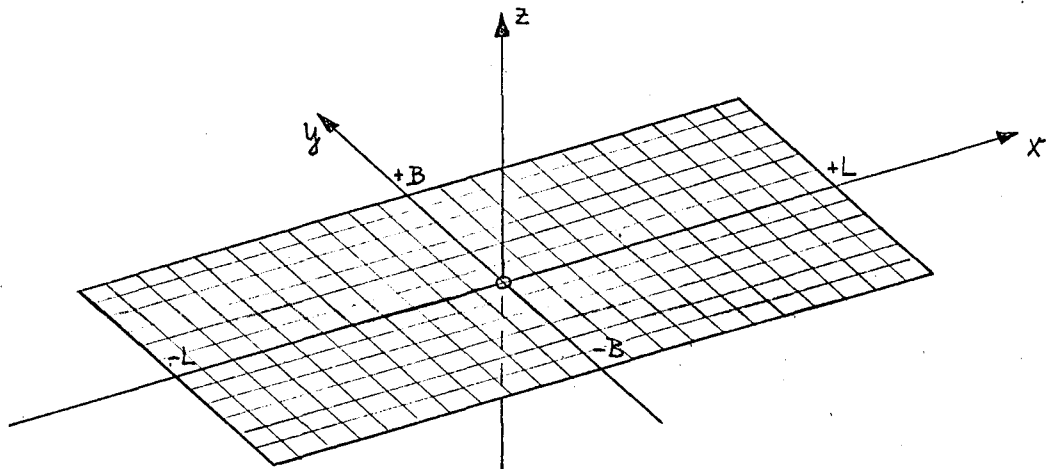


Diagramm 1

gramm 1). Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß der Koordinatenursprung in der Mitte der Platte liegt. Die x-Achse weist in Richtung der Längenausdehnung, die y-Achse in Richtung der Breitenausdehnung der Platte. Die Höhengenausdehnung der Platte (z-Richtung) ist verschwindend klein. Die Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $V$  in Richtung der positiven z-Achse. Die umgebende Flüssigkeit ist in allen Richtungen unendlich weit ausgedehnt und befindet sich im Unendlichen in Ruhe.

Dieses Problem wird durch ein Geschwindigkeits-Potential  $\phi$  beschrieben das folgende Bedingungen erfüllt:

Im gesamten Flüssigkeitsbereich (Laplace-Gleichung):

$$\Delta \phi(x, y, z) \equiv 0, \quad (1)$$

auf der Rechteckplatte:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0) = V; \quad |x| \leq L, \quad |y| \leq B, \quad (2)$$

und im Unendlichen:

$$\phi(x, y, z) = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (3)$$

Die Lösung dieses Randwertproblems ist mit einem Singularitäten-Ansatz möglich, der die Laplace-Gleichung erfüllt. Es kommen vor allem Wirbel und Dipole in Frage. Einer Dipolbelegung

auf der Platte wurde aus zwei Gründen der Vorzug gegeben: (1) Im vorliegenden Problem ist die Richtung der Dipole von vornherein bekannt; sie ist senkrecht zur Ebene der Platte. Man hat also nur noch die Stärke der Dipole zu berechnen. Sollte dagegen die Platte durch eine Wirbelbelegung dargestellt werden, so müßte man Stärke und Richtung der in der Plattenebene liegenden Wirbel bestimmen und dabei die Erhaltungssätze berücksichtigen. (2) Der besondere Vorteil besteht darin, daß ein ganz einfacher Zusammenhang zwischen der Dipolbelegung und dem Potential an der Platte und damit auch zwischen der Änderung der Dipolbelegung mit der Zeit und den instationären Druckanteilen besteht. Daher läßt sich aus der Dipolbelegung in sehr einfacher Weise die hydrodynamische Masse bestimmen.

Das Geschwindigkeits-Potential eines Dipols, der sich im Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  befindet, läßt sich als örtliche Ableitung der Grundlösung der dreidimensionalen Laplace-Gleichung (vgl. zB. Robinson und Laurmann (1956)<sup>9</sup>, p. 16 ff) schreiben:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

$$\text{mit } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Damit gilt für die z-Komponente der induzierten Geschwindigkeit:

$$v_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \zeta} \left( \frac{1}{4\pi r} \right)$$

$$v_z = - \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5} \right\}. \quad (5)$$

Die gesuchte Dipolbelegung auf der Platte,  $m(x, y)$ , gewinnt man aus folgender Integralgleichung

$$v_z(x, y, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} - \frac{1}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \int_{-B}^{+B} m(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right\} d\eta d\xi, \quad (6)$$

für  $|x| \leq L, |y| \leq B.$

Im vorliegenden Problem der Translation der Platte mit der Geschwindigkeit  $V$  ist die linke Seite der Gleichung unabhängig

von den Ortskoordinaten  $(x, y)$ . Es wären jedoch auch andere Forderungen für  $v_z(x, y, 0)$  möglich, wenn z.B. die Strömung bei elastischen Vibrationen der Platte bestimmt werden soll.

Die Lösung der Integralgleichung (6) soll mit Hilfe eines Doppelreihen-Ansatzes für die gesuchte Belegungsfunktion  $m(x, y)$  erfolgen. Dieser Reihenansatz ist den Ansätzen aus der Tragflügeltheorie (vgl. z.B. Robinson und Laurmann (1956)<sup>9</sup>) nachgebildet. Es soll gelten:

$$m(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(\kappa) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right), \quad (7)$$

mit  $\kappa = B/L$ .

Die Funktionen  $F_k$  entsprechen im wesentlichen dem Ansatz von Glauert (1948)<sup>2</sup> für das ebene Tragflügelproblem, ein Unterschied besteht nur im ersten Glied der Reihe, der Funktion  $F_0$ . Ein entsprechender Ansatz wurde vom Verfasser (1965)<sup>7</sup> (siehe dort Gl. (16)) zur Behandlung der Umströmung der unendlich langen Platte benutzt. Im vorliegenden Problem können nur symmetrische Funktionen in den Reihen auftreten. Es wird daher gesetzt:

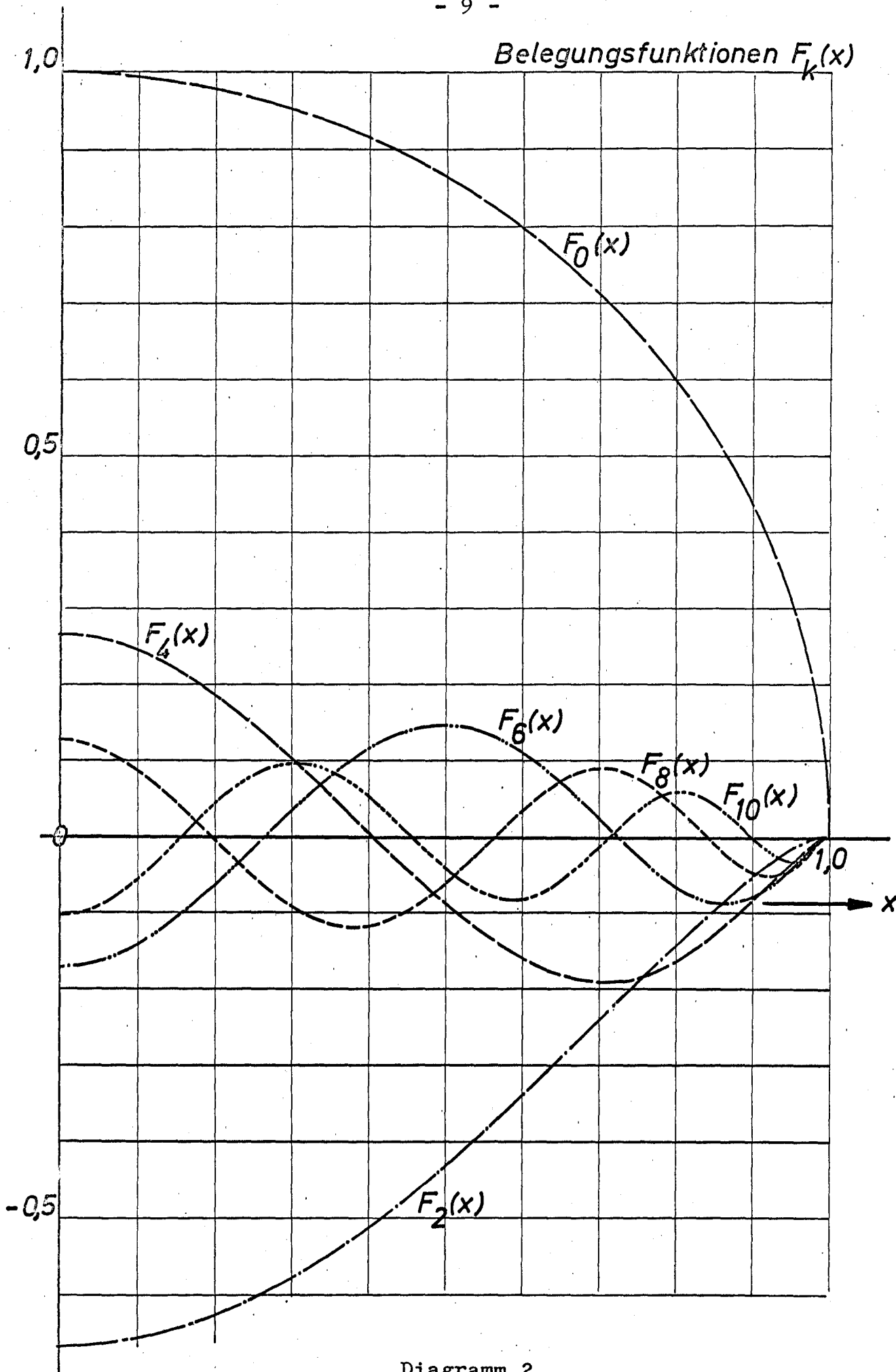
$$F_0(x) = U_1(x)$$
$$F_k(x) = \frac{1}{4k+2} U_{2k+1}(x) - \frac{1}{4k-2} U_{2k-1}(x); \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Dabei bezeichnet  $U_k(x)$  das Tschebyscheff-Polynom zweiter Art, das folgendermaßen definiert ist:

$$U_k(x) = \sin(k \cdot \arccos x). \quad (9)$$

Dieses ist die Definition, wie sie z.B. bei Jahnke-Emde-Lösch (1960)<sup>5</sup>, p. 96 ff gegeben ist. Sie unterscheidet sich wesentlich von der Definition der Funktionen  $U_k(x)$  bei Abramowitz und Stegun (1964)<sup>1</sup>, p. 77 ff.

Die Belegungsfunktionen  $F_k(x)$  entsprechend den Gleichungen (8) sind im Diagramm 2 für die Ordnungen  $k = 0, 2, 4, 6, 8$  und 10 dargestellt. Man erkennt, daß die Funktionen nicht normiert sind. Die gewählte Form der Funktionen für den Reihenansatz ergibt außerdem kein Orthogonalsystem. Dieser Punkt soll noch



etwas ausführlicher behandelt werden. Im zweidimensionalen Fall kann man die Dipolbelegungen durch Differentiation in Wirbelbelegungen umformen. In diesem Falle nehmen die Funktionen für den Reihenansatz für die Wirbelbelegung die Form an:

$$F_0'(x) = \frac{T_1(x)}{U_1(x)}$$

$$F_k'(x) = U_{2k}(x) \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Diese Funktionen bilden mit Ausnahme der Funktion  $F_0'(x)$  ein Orthogonalsystem, und zwar mit der Gewichtsfunktion  $1/U_1(x)$ . Die Funktion  $F_0'(x)$  ist zu keiner der übrigen Funktionen orthogonal. Es ist aber auch gar nicht erforderlich, daß der Lösungsansatz selbst bereits ein Orthogonalsystem darstellt. Man erkennt nämlich bei der Lösung des zweidimensionalen Problems, daß die Reihe entsprechend Gl. (8) nach dem Einsetzen in die Integralgleichung und nach Durchführung der Integrationen in ein vollständiges Orthogonalsystem übergeht, nämlich in die Tschebyscheff-Polynome erster Art  $T_k(x)$  (vgl. dazu Verfasser (1965)<sup>7</sup>, dort Gl. (14)). Man erkennt, daß an dieser Stelle des Problems eine orthogonale Reihe einen wesentlichen Vorteil bedeutet, weil man die gesuchten Koeffizienten der Reihe unabhängig voneinander bestimmen <sup>kann</sup>. Insbesondere wird die Translation der zweidimensionalen Platte durch das erste Glied der Reihe beschrieben.

Man wird kaum erwarten können, daß sich für das dreidimensionale Problem der Rechteckplatte in Translation ein entsprechender Ansatz finden läßt, der nach der Integration zusammen mit dem Kern der Integralgleichung auf ein Orthogonalsystem führt. Der gewählte Ansatz (7) liefert daher Koeffizienten  $a_{ik}$ , die sich gegenseitig beeinflussen. Die Koeffizienten sind also insbesondere auch davon abhängig, wieviele Glieder der Reihe in der praktischen Rechnung berücksichtigt werden. Man sollte erwarten, daß bei steigendem Rechenaufwand, d.h. bei einer Vergrößerung der Zahl der berücksichtigten Reihenglieder, eine Konvergenz eintritt, daß also die wechselseitigen Beeinflussungen bei steigendem Rechenaufwand abnehmen und schließlich unbedeutend

werden. Systematische Beispielrechnungen (vgl. Abschnitt 7.) zeigen tatsächlich eine langsame Konvergenz. Eine weiterreichende Aussage ist an Hand der berechneten Beispiele nicht möglich, weil dafür der Rechenaufwand nicht weit genug gesteigert werden könnte. Dabei reichte die Rechengenauigkeit und die Konvergenz zur Bestimmung der Dipolbelegung schon bei weitem aus.

Mit dem Ansatz (7) geht die Integralgleichung (6) in die Form über:

$$v_z(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi B} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(\kappa) \cdot J_{ik}(x, y, \kappa), \quad (10)$$

$$\text{mit } \kappa = B/L. \quad (11)$$

Dabei sollen folgende Bezeichnungen gelten:

$$I_{ik}(x, y, \kappa) = B \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-L}^{+L} \int_{-B}^{+B} U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) \cdot U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) \cdot \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right] d\eta d\xi, \quad (12)$$

und weiter:

$$J_{00}(x, y, \kappa) = I_{11}(x, y, \kappa), \quad (13a)$$

$$J_{0k}(x, y, \kappa) = \frac{1}{4k+2} I_{1(2k+1)}(x, y, \kappa) - \frac{1}{4k-2} I_{1(2k-1)}(x, y, \kappa); \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (13b)$$

$$J_{i0}(x, y, \kappa) = \frac{1}{4i+2} I_{(2i+1)1}(x, y, \kappa) - \frac{1}{4i-2} I_{(2i-1)1}(x, y, \kappa); \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (13c)$$

$$\begin{aligned}
 J_{ik}(x, y, n) = & \frac{1}{(4i+2)(4k+2)} I_{(2i+1)(2k+1)}(x, y, n) - & (13d) \\
 & - \frac{1}{(4i+2)(4k-2)} I_{(2i+1)(2k-1)}(x, y, n) - \\
 & - \frac{1}{(4i-2)(4k+2)} I_{(2i-1)(2k+1)}(x, y, n) + \\
 & + \frac{1}{(4i-2)(4k-2)} I_{(2i-1)(2k-1)}(x, y, n) ;
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3 \dots ; k = 1, 2, 3 \dots$$

Die Gleichung (10) ist die Grundlage zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_{ik}$ , durch die die Dipolverteilung  $m(x,y)$  auf der Platte festgelegt ist. Dazu muß aber die Doppelreihe durch eine endliche Doppelsumme ersetzt werden, und zwar sollen im folgenden die höchsten Glieder die Nummern  $M-1$  bzw.  $N-1$  haben, so daß die Doppelsumme  $M \cdot N$  Glieder enthält. Die Randbedingung (10) wird an einer Reihe von Aufpunkten  $(x,y)$  auf der Platte erfüllt. Die Mindestzahl von Aufpunkten beträgt  $M \cdot N$ , so daß die Einflußgrößen  $J_{ik}(x,y,n)$  mindestens für alle  $M \cdot N$  Belegungsfunktionen und für alle  $M \cdot N$  Aufpunkte berechnet werden müssen. Es besteht außerdem die Möglichkeit, das Gleichungssystem durch die Wahl einer größeren Zahl von Aufpunkten überzubestimmen und dann einen Ausgleich nach dem Verfahren des kleinsten Fehlerquadrats vorzunehmen. Diese Möglichkeit wurde u.a. auch von Isay und Armonat (1966)<sup>4</sup> angegeben. Auf diese Möglichkeit wird in der Diskussion der allgemeinen Eigenschaften des Rechenverfahrens besonders eingegangen.

Die Gleichung soll für die weitere Behandlung jetzt in dimensionslose Form umgeschrieben werden. Dazu werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$A_{ik}(n) = \frac{a_{ik}(n)}{2BV} \quad (14)$$

$$M(x, y) = \frac{m(x, y)}{2BV} \quad (15)$$

Es gilt also:

$$M(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right) \quad (16)$$

und:

$$\frac{1}{V} v_z(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot J_{ik}(x, y, n) \quad (17)$$

In dem hier behandelten Fall der Translation der Platte ist der Wert  $v_z/V$  unabhängig von der Lage des Aufpunktes in jedem Falle gleich 1.

Es kann jetzt gezeigt werden (vgl. dazu z.B. Robinson und Laurmann (1956)<sup>9</sup>, p. 227), daß zwischen der Dipolbelegung und dem Geschwindigkeitspotential an der dünnen Platte folgender besonders einfacher Zusammenhang besteht:

$$\phi(x, y, +0) = \frac{1}{2} m(x, y) \quad (18)$$

$$\phi(x, y, -0) = -\frac{1}{2} m(x, y) \quad (19)$$

Für den instationären Anteil des Druckes gilt dann weiter:

$$p_i(x, y, +0) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, +0) = \frac{\rho}{2} \frac{\partial m}{\partial t}(x, y), \quad (20)$$

wobei das angegebene negative Vorzeichen in der zweiten Hälfte der Gleichung für die Oberseite der Platte ( $z = +0$ ) gilt.

Bei beschleunigter Translation der Platte ist die zeitliche Änderung der Dipolstärke  $\partial m / \partial t$  der Beschleunigung  $\dot{V}$  in der gleichen Weise zugeordnet, wie die Dipolstärke  $m$  der Geschwindigkeit  $V$ . Man macht folgenden Reihenansatz:

$$\frac{\partial m}{\partial t}(x, y) = \sum_i \sum_k b_{ik}(n) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right); \quad (21)$$

mit:

$$B_{ik}(n) = \frac{b_{ik}(n)}{2B\dot{V}} \quad (22)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}(x, y) = \frac{\partial m / \partial t(x, y)}{2B\dot{V}} \quad (23)$$

gilt dann:

$$\frac{\partial M}{\partial t}(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} B_{ik} \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right) \quad (24)$$

$$\frac{\dot{v}_z(x, y, 0)}{\dot{V}} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} B_{ik}(n) \cdot J_{ik}(x, y, n) \quad (25)$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung (25) genau wie die linke Seite von Gleichung (17) für alle Aufpunkte (x, y) den Wert 1 hat, müssen die Koeffizienten der beiden Reihen übereinstimmen:

$$B_{ik}(n) = A_{ik}(n) \quad (26)$$

Somit kann man schreiben:

$$\frac{\partial M}{\partial t}(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right) \quad (27)$$

Man kann dann weiterhin für den Druck schreiben:

$$\frac{p_i(x, y, +0)}{\rho B \dot{V}} = - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right), \quad (28)$$

und schließlich unter Berücksichtigung von Gleichung (16):

$$\frac{p_i(x, y, +0)}{\rho B \dot{V}} = - M(x, y) \quad (29)$$

Das bedeutet, daß im Falle der beschleunigten Platte die instationären Drücke proportional der darstellenden Dipolbelegung der stationär bewegten Platte sind.

Die hydrodynamische Masse läßt sich entsprechend ihrer Definition dadurch bestimmen, daß man die resultierende instationäre hydrodynamische Kraft durch die Beschleunigung dividiert. Es gilt dann:

$$P_i = \int_{-L}^{+L} \int_{-B}^{+B} [-p_i(x, y, +0) + p_i(x, y, -0)] dx dy$$

$$P_i = -2 \cdot \int_{-L}^{+L} \int_{-B}^{+B} p_i(x, y, +0) dx dy, \quad (30)$$

und weiter:

$$\frac{P_i}{2\rho B^2 L \dot{V}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot F_i\left(\frac{x}{L}\right) \cdot F_k\left(\frac{y}{B}\right) \right] d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{y}{B}\right).$$

Man kann die Summation und die Integration vertauschen, so daß man schreiben kann

$$\frac{P_i}{2\rho B^2 L \dot{V}} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}(n) \cdot D_i \cdot D_k, \quad (31)$$

wobei die Bezeichnung benutzt wurde:

$$D_n = \int_{-1}^{+1} F_n(x) dx. \quad (32)$$

Es läßt sich leicht zeigen (vgl. z.B. Verfasser (1965)<sup>7</sup>), daß:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \pi/2 \\ D_1 &= -\pi/4 \\ D_n &= 0 \quad n = 2, 3, 4 \dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Also:

$$\frac{P_i}{2\rho B^2 L \dot{V}} = \frac{\pi^2}{16} \left\{ 4A_{00}(n) - 2A_{10}(n) - 2A_{01}(n) + A_{11}(n) \right\}. \quad (34)$$

Zur Beschreibung der hydrodynamischen Masse soll ein dimensionsloser Koeffizient  $C(n)$  eingeführt werden. Dieser Koeffizient errechnet sich als der Quotient der tatsächlichen hydrodynamischen Masse und der hydrodynamischen Masse für den Abschnitt der Länge  $2L$  aus einer unendlich langen ebenen Platte der Breite  $2B$ . Der Koeffizient  $C(n)$  ist damit der Korrekturfaktor für die Anwendung der Streifenmethode bei der Bestimmung der hydrodynamischen Masse der Rechteckplatte. Es gilt:

$$C(\kappa) = \frac{M''(\kappa)}{2\pi Q B^2 L} = \frac{\pi}{16} \left\{ 4A_{00}(\kappa) - 2A_{10}(\kappa) - 2A_{01}(\kappa) + A_{11}(\kappa) \right\}. \quad (35)$$

Im vorliegenden Falle ist die Dipolordinate in der Mitte der Platte,  $x = y = 0$ , immer der größte Ordinatenwert. Bezieht man das Volumen unter der Dipolbelegung auf das umschriebene Parallelepipid, so soll das als Völligkeit  $\varphi(\kappa)$  der Dipolbelegung bezeichnet werden. Es gilt:

$$\varphi(\kappa) = \frac{1}{4 \cdot M(0,0)} \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M(x, y) \cdot d\left(\frac{x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{y}{B}\right)$$

$$\varphi(\kappa) = \frac{\pi^2}{64 \cdot M(0,0)} \cdot \left\{ 4A_{00}(\kappa) - 2A_{10}(\kappa) - 2A_{01}(\kappa) + A_{11}(\kappa) \right\} \quad (36)$$

$$\varphi(\kappa) = \frac{\pi \cdot C(\kappa)}{4 \cdot M(0,0)}$$

Schließlich ist der Mittelwert der dimensionslosen Dipolbelegung  $\bar{M}$  ebenfalls zur Charakterisierung der Form der Dipolbelegung geeignet. Dieser Mittelwert hat natürlich enge Beziehungen zur Völligkeit  $\varphi(\kappa)$  und zum Koeffizienten  $C(\kappa)$ .

$$\bar{M}(\kappa) = \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} M(x, y) \cdot d\left(\frac{x}{L}\right) \cdot d\left(\frac{y}{B}\right)$$

$$\bar{M}(\kappa) = \frac{\pi^2}{64} \left\{ 4A_{00}(\kappa) - 2A_{10}(\kappa) - 2A_{01}(\kappa) + A_{11}(\kappa) \right\} \quad (37)$$

$$\bar{M}(\kappa) = \frac{\pi}{4} \cdot C$$

#### 4. Verfahren zur Berechnung der Einflußgrößen

Zur Berechnung der Einflußgrößen  $J_{ik}$ , bzw. der Hilfsintegrale  $I_{ik}$ , wird ein besonderes numerisches Verfahren angewendet,

das auf die Form der Integranden mit der starken Singularität Rücksicht nimmt. Dazu wird das Integral  $I_{ik}(x,y,)$  in zwei Anteile aufgeteilt. Der eine Anteil erstreckt sich über das kleine Quadrat mit dem Mittelpunkt  $(x,y)$  und der Seitenlänge  $2\delta$ , der andere Anteil erstreckt sich dann über den Rest der Rechteckplatte (vgl. Diagramm 3).

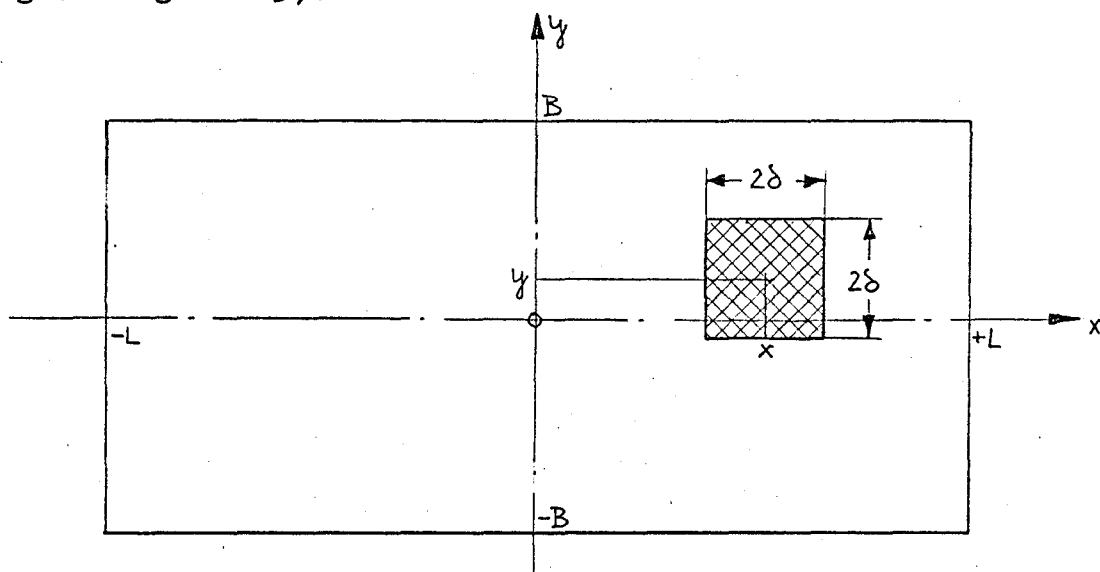


Diagramm 3

Es gilt:

$$I_{ik}(x, y, n) = S_{ik}(x, y, n, \delta) + R_{ik}(x, y, n, \delta), \quad (38)$$

wobei:

$$S_{ik}(x, y, n, \delta) = \lim_{z \rightarrow 0} B \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) \cdot U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) \cdot \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right] d\xi d\eta \quad (39)$$

$$\begin{aligned} R_{ik}(x, y, n, \delta) &= \lim_{z \rightarrow 0} B \iint_{\text{Rest}} U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) \cdot U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) \cdot \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right] d\xi d\eta \\ &= B \iint_{\text{Rest}} U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) \cdot U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) \cdot \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Solange die Integration ~~nicht~~ den Punkt  $(x,y)$  nicht mit einschließt, läßt sich der Grenzübergang  $z \rightarrow 0$  schon vor der Integration vollziehen, wie das in Gleichung (40) für das Integral

$R_{ik}$  geschehen ist. Das Integral  $R_{ik}$  entsprechend Gleichung (40) läßt sich mit einem beliebigen Quadraturverfahren bestimmen. Auf die Wahl des Quadraturverfahrens wird später eingegangen.

Zur Berechnung der Integrale  $S_{ik}$  werden zunächst die Funktionen  $U_i$  bzw.  $U_k$  in Taylor-Reihen um den Punkt  $(x,y)$  entwickelt. Man kann schreiben:

$$U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} U_i^{(r)}\left(\frac{x}{L}\right) \cdot \left[\frac{\xi}{L} - \frac{x}{L}\right]^r \quad (41)$$

$$U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} U_k^{(s)}\left(\frac{y}{B}\right) \cdot \left[\frac{\eta}{B} - \frac{y}{B}\right]^s, \quad (42)$$

wobei:

$$U_i^{(r)}(x) = \frac{d^r U_i(x)}{dx^r} \quad (43)$$

Für das Produkt der beiden Reihen (41) und (42) läßt sich noch schreiben:

$$U_i\left(\frac{\xi}{L}\right) \cdot U_k\left(\frac{\eta}{B}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} U_i^{(r)}\left(\frac{x}{L}\right) \cdot U_k^{(s)}\left(\frac{y}{B}\right) \cdot \left[\frac{\xi}{L} - \frac{x}{L}\right]^r \cdot \left[\frac{\eta}{B} - \frac{y}{B}\right]^s \quad (44)$$

Es sollen jetzt in den Rechnungen dimensionslose Koordinaten eingeführt werden, und zwar wird in allen Fällen die halbe Breite der Platte  $B$  als Bezugsgröße benutzt. Es soll gelten:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{B}; & \Xi &= \frac{\xi}{B}; & Y &= \frac{y}{B}; & H &= \frac{\eta}{B}; \\ \Delta &= \frac{\delta}{B}; & Z &= \frac{z}{B}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Ferner sollen die Bezeichnungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{B}{L} \\ u &= \Xi - X; & v &= H - Y. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Es folgt mit diesen Bezeichnungen für das Integral  $S_{ik}$ :

$$S_{ik}(x, y, u, \delta) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} u^r \cdot U_i^{(r)}(uX) \cdot U_k^{(s)}(Y) \cdot T(r, s, \Delta), \quad (47)$$

wobei die Bezeichnung eingeführt wurde:

$$T(r, s, \Delta) = \lim_{Z \rightarrow 0} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} u^r v^s \left\{ \frac{1}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{3/2}} - \frac{3Z^2}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{5/2}} \right\} du dv \quad (48)$$

Es muß jetzt die Frage des Grenzüberganges  $Z \rightarrow 0$  behandelt werden. Es kann gezeigt werden, daß man durch Bestimmung des Integrals (48) und nachfolgenden Grenzübergang auf genau das gleiche Ergebnis kommt, wie wenn man den Grenzübergang naiv vollzieht; d.h. wie wenn man den zweiten Term in der geschweiften Klammer vernachlässigt und das verbleibende Integral mit der Kernfunktion  $1/(u^2 + v^2)^{3/2}$  als "endlichen" Teil im Sinne von Hadamard deutet (vgl. z.B. Lighthill (1966)<sup>6</sup>, p. 44).

Im folgenden sollen die wesentlichen Schritte der sehr langwierigen Rechnung für das Integral  $T(0, 0, \Delta)$  wiedergegeben werden:

$$T(0, 0, \Delta) = \lim_{Z \rightarrow 0} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{du dv}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{3/2}} - \lim_{Z \rightarrow 0} 3Z^2 \int_{-\Delta}^{+\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{du dv}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{5/2}}$$

Man kann zunächst die Integration über eine der Variablen, z.B. u, durchführen:

$$T(0, 0, \Delta) = \lim_{Z \rightarrow 0} \int_{-\Delta}^{+\Delta} dv \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{du}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{3/2}} - \lim_{Z \rightarrow 0} 3Z^2 \int_{-\Delta}^{+\Delta} dv \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{du}{(u^2 + v^2 + Z^2)^{5/2}};$$

wobei sich die abgespaltenen Integrale z.B. nach Gröbner und Hofreiter (1957)<sup>3</sup> (231.19a bzw. 20b) bestimmen lassen; es gilt dann:

$$\begin{aligned}
 T(0, 0, \Delta) &= \lim_{Z \rightarrow 0} 2\Delta \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{dv}{(v^2 + Z^2) \sqrt{v^2 + \Delta^2 + Z^2}} \\
 &= \lim_{Z \rightarrow 0} 2\Delta Z^2 \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{dv}{(v^2 + Z^2) [v^2 + \Delta^2 + Z^2]^{3/2}} \\
 &= \lim_{Z \rightarrow 0} 4\Delta Z^2 \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{dv}{(v^2 + Z^2)^2 \sqrt{v^2 + \Delta^2 + Z^2}}
 \end{aligned}$$

Das erste der drei Integrale ist ebenfalls bei Gröbner und Hofreiter (1957)<sup>3</sup> angegeben. Die beiden anderen Integrale lassen sich durch die Eulersche Substitution rational machen und dann durch Partialbruchzerlegung lösen.

Es wurde daher die zweite der bei Ryshik - Gradstein (1957)<sup>10</sup>, p. 77 angegebenen Substitutionen benutzt. Nach langwierigen Umrechnungen erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 T(0, 0, \Delta) &= \\
 &= \lim_{Z \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{Z} \operatorname{arctg} \frac{\Delta Z}{\Delta^2 + Z^2 - \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2}} - \frac{2}{Z} \operatorname{arctg} \frac{\Delta Z}{\Delta^2 + Z^2 + \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2}} \right. \\
 &\quad + \frac{4Z^2}{\Delta(4\Delta^2 + 2Z^2 - 2\Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})} - \frac{4Z^2}{\Delta(4\Delta^2 + 2Z^2 + 2\Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})} \\
 &\quad - \frac{2(2\Delta^2 + Z^2 - \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})}{\Delta(6\Delta^2 + 2Z^2 - 4\Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})} + \frac{2(Z^2 - \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})}{\Delta(2\Delta^2 + 2Z^2)} \\
 &\quad \left. - \frac{2}{Z} \operatorname{arctg} \frac{\Delta Z}{\Delta^2 + Z^2 - \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2}} + \frac{2}{Z} \operatorname{arctg} \frac{\Delta Z}{\Delta^2 + Z^2 + \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(Z^2 + \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})}{\Delta(2\Delta^2 + 2Z^2)} + \frac{2(2\Delta^2 + Z^2 + \Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})}{\Delta(6\Delta^2 + 2Z^2 + 4\Delta \sqrt{2\Delta^2 + Z^2})} \right\}
 \end{aligned}$$

Aus dieser Form der Lösung läßt sich der Grenzübergang vornehmen, man erhält:

$$T(0,0,\Delta) = \frac{2}{\Delta} \left\{ -\frac{2-\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} \right\}$$

$$T(0,0,\Delta) = -\frac{4\sqrt{2}}{\Delta} \quad (49)$$

Für die weiteren Integrale  $T(r,s,\Delta)$  kann der Grenzwert in der gleichen Weise bestimmt werden. Damit kann gezeigt werden, daß die Integrale  $T(r,s,\Delta)$  durch den "endlichen" Teil des folgenden Integrals richtig bestimmt werden:

$$T(r,s,\Delta) = \text{FP} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{u^r v^s}{[u^2 + v^2]^{3/2}} du dv \quad (50)$$

Man errechnet für die Integrale  $T$  folgende Werte - aus Symmetriegründen liefern ungerade Potenzen von  $u$  bzw.  $v$  keinen Beitrag -

$$\left. \begin{aligned} T(0,0,\Delta) &= z_1/\Delta \\ T(0,2,\Delta) &= T(2,0,\Delta) = z_2 \cdot \Delta \\ T(0,4,\Delta) &= T(4,0,\Delta) = z_3 \cdot \Delta^3 \\ T(2,2,\Delta) &= z_4 \cdot \Delta^3 \\ T(0,6,\Delta) &= T(6,0,\Delta) = z_5 \cdot \Delta^5 \\ T(2,4,\Delta) &= T(4,2,\Delta) = z_6 \cdot \Delta^5 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -4\sqrt{2} && \cong -5,656\ 854\ 61 \\ z_2 &= 2 \log A && \cong 3,525\ 494\ 39 \\ z_3 &= 2\sqrt{2} - \log A && \cong 1,065\ 680\ 13 \\ z_4 &= 4/3 \cdot \log A - 4/3 \cdot \sqrt{2} && \cong 0,464\ 711\ 36 \\ z_5 &= 3/4 \cdot \log A - 1/2 \cdot \sqrt{2} && \cong 0,614\ 935\ 55 \\ z_6 &= 2/5 \cdot \sqrt{2} - 1/5 \cdot \log A && \cong 0,213\ 136\ 03 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

mit

$$A = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

Weitere Integrale wurden nicht bestimmt, weil die im folgenden beschriebene Bestimmung der höheren Ableitungen der Tschebyscheff-Polynome zu sehr unhandlichen Ausdrücken führt und daher nicht weiter als bis zur 6. Ableitung getrieben wurde. Eine ausreichende Konvergenz der Reihe (47) für  $S_{ik}$  kann durch geeignete Wahl von  $\Delta$  immer erreicht werden.

Die Ableitungen der Tschebyscheff-Polynome  $U_i(x)$  können in folgender Form angegeben werden:

$$U_i(x) = \sin \psi \quad , \quad \text{wenn } \psi = \arccos x$$

$$U_i^{(2)}(x) = -\frac{i}{2 \sin^3 \psi} * \quad (53)$$

$$* \left\{ [i+1] \cdot \cos (i-1)\psi - [i-1] \cdot \cos (i+1)\psi \right\}$$

$$U_i^{(4)}(x) = -\frac{i}{8 \sin^7 \psi} * \quad (54)$$

$$* \left\{ [i^3 + 6i^2 + 11i + 6] \cdot \cos (i-3)\psi - [3i^3 + 6i^2 - 27i - 54] \cdot \cos (i-1)\psi + [3i^3 - 6i^2 - 27i + 54] \cdot \cos (i+1)\psi - [i^3 - 6i^2 + 11i - 6] \cdot \cos (i+3)\psi \right\}$$

$$U_i^{(6)}(x) = -\frac{i}{32 \sin^{11} \psi} * \quad (55)$$

$$* \left\{ [i^5 + 15i^4 + 85i^3 + 225i^2 + 274i + 120] \cdot \cos (i-5)\psi - [5i^5 + 45i^4 + 5i^3 - 1005i^2 - 3250i - 3000] \cdot \cos (i-3)\psi + [10i^5 + 30i^4 - 410i^3 - 1230i^2 + 4000i + 12000] \cdot \cos (i-1)\psi - [10i^5 - 30i^4 - 410i^3 + 1230i^2 + 4000i - 12000] \cdot \cos (i+1)\psi \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ [5i^5 - 45i^4 + 5i^3 + 1005i^2 - 3250i + 3000] \cdot \cos(i+3)\psi \\ &- [i^5 - 15i^4 + 85i^3 - 225i^2 + 274i - 120] \cdot \cos(i+5)\psi \end{aligned} \right\}.$$

Für die numerische Berechnung des Integrals  $R_{ik}$  über den Rest der Fläche des Rechtecks wurde ein speziell angepaßtes Verfahren entwickelt. Mit den dimensionslosen Größen aus Gleichung (45) geht Gleichung (40) über in die Form:

$$R_{ik}(X, Y, n, \Delta) = \iint_{\text{Rest}} u_i(\Xi) \cdot u_k(H) \frac{d\Xi dH}{[(X-\Xi)^2 + (Y-H)^2]^{3/2}} \quad (56)$$

Die größten Schwierigkeiten bei der Quadratur entstehen in der Nähe der Singularität  $(x, y)$ , denn mit Rücksicht auf die beschränkte Zahl der Glieder der Reihe (47) darf  $\Delta$  nicht sehr groß gewählt werden. Die Rechnungen zeigen, daß die Seitenlänge des Quadrats  $2\Delta$  auf jeden Fall kleiner sein sollte als der Abstand des Aufpunktes  $(x, y)$  von der nächsten Kante der Platte. Dies wird erforderlich durch die schlechte Konvergenz der Reihe (41) bzw. (42) in der Nähe der Plattenkanten. Für die Genauigkeit der Quadraturen ist daher vor allem die Kernfunktion bestimmend. Man kann voraussetzen, daß sich die Tschebyscheff-Polynome nur langsam ändern, vor allem, wenn man annimmt, daß man mit wenigen Termen in der Entwicklung (16) für die Dipolbelegung auskommt.

Bei der Betrachtung zum Rechenaufwand wurde die Belegung als konstant angenommen, die Quadratur erfolgt jeweils für kleine Teilflächen (Rechtecke bzw. Quadrate) nach dem Verfahren von Gauß. Für eine solche Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen in x- und in y-Richtung kann man aus dem Restglied herleiten, daß die Schrittweite (Seitenlänge der Teilflächen) etwa proportional der 1,3-ten Potenz des Abstandes vom Aufpunkt sein muß. Wenn das erfüllt ist, dann wird in allen Teilflächen der absolute Fehler bei der Quadratur gleich groß.

Durch eine entsprechende Betrachtung kann gezeigt werden, daß eine Simpson-Quadratur im vorliegenden Problem bei gleichem Rechenaufwand einen geringfügig größeren Fehler bedingt.

Im Rechenprogramm wird die Größe der Teilflächen entsprechend der obigen Überlegung mit dem Abstand von der Singularität variiert. Außerdem wird aber eine obere Grenze für Größe der Teilflächen vorgegeben.

Am Rande der Platte haben die Tschebyscheff-Polynome  $U_i$  bzw.  $U_k$  senkrechte Tangenten. Diese Schwierigkeit wirkt sich jedoch nur bei den Quadraturen zum Integral  $I_{11}$  aus, das später die Einflußgröße  $J_{00}$  ergibt. Mit Rücksicht darauf wird an den Rändern der Platte mit einer verfeinerten Teilung gerechnet. Dagegen haben die Belegungsfunktionen  $F_i$  bzw.  $F_k$  für  $i \neq 0$  bzw.  $k \neq 0$  durch die Differenzbildung an den Rändern eine horizontale Tangente (vgl. Diagramm 2). Die Fehler, die sich also am Rande bei der Berechnung der  $I_{ik}$  ergeben, heben sich in den Werten  $J_{ik}$  heraus, wenn für alle Quadraturen zu einem Aufpunkt  $(x,y)$  die gleiche Flächenaufteilung benutzt wird.

Ein Beispiel für eine solche Aufteilung der Rechteckfläche in Teilflächen ist im Diagramm 4 dargestellt. Dabei sei angemerkt, daß im Diagramm 4 die Restfläche in etwa 700 Teilflächen aufgeteilt wurde. In den tatsächlichen Rechnungen wurden im Vergleichsfall bis zu 1200 Teilflächen benutzt. Der Unterschied ist hauptsächlich durch die Wahl eines kleineren Werts für  $\Delta$  bedingt, wobei man eine große Zahl von sehr kleinen Flächenelementen um das innere Quadrat erhält. +

Für jeden Aufpunkt  $(x,y)$  wird die Teilung im Vorwege bestimmt und dann für alle Quadraturen beibehalten.

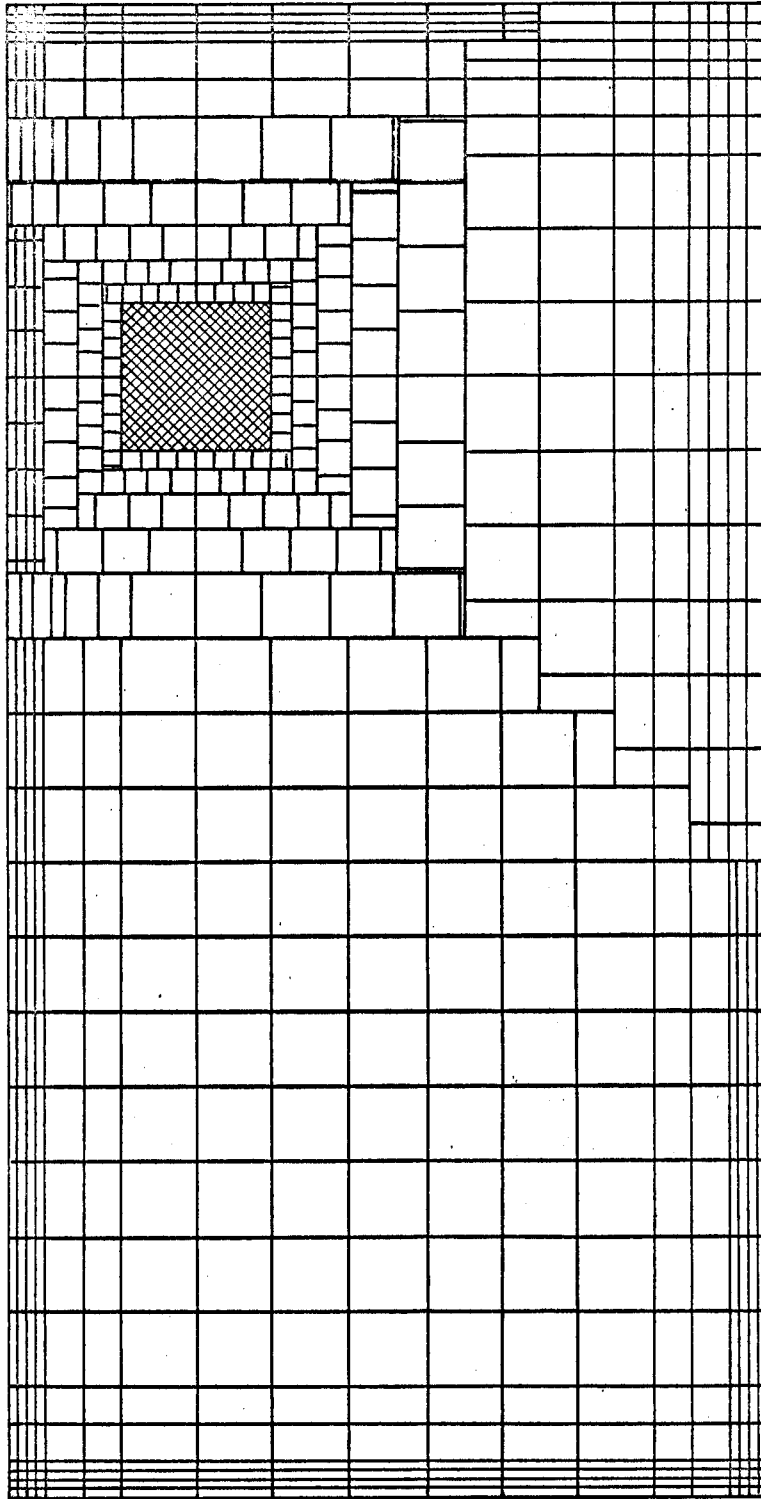
In jeder Teilfläche wird die Quadratur mit Hilfe von 9 Stützwerten vorgenommen. Das Integral (56) geht über in die Summe:

$$R_{ik}(X, Y, \kappa, \Delta) = \sum_m \Delta R_{ik}(X, Y, \kappa, m) \quad (57)$$

Bezeichnet man die Mitte der Teilfläche mit  $(x_m, y_m)$  und die Seitenlängen mit  $2\Delta X_m$  bzw.  $2\Delta Y_m$ , so kann man schreiben:

---

+ Bei kleineren Seitenverhältnissen  $\kappa$  steigt die Zahl der Flächenelemente entsprechend.



Beispiel  $\alpha = 0,5$ :  $x/L = 0,5$   $y/B = 0,5$   $\delta/B = 0,1$   $\Delta X_{\max} = 0,1$

$H = 5$ ; 692 Flächenelemente

Aufteilung der Rechteckfläche zur Durchführung der Gauß - Quadraturen

Diagramm 4

$$\begin{aligned} \Delta R_{ik}(X, Y, n, m) &= \\ &= \frac{\Delta X_m \cdot \Delta Y_m}{81} \left\{ \begin{aligned} &25 \cdot f_{ik}(X, Y, X_1, Y_1, n) \\ &+ 40 \cdot f_{ik}(X, Y, X_1, Y_m, n) \\ &+ 25 \cdot f_{ik}(X, Y, X_1, Y_2, n) \\ &+ 40 \cdot f_{ik}(X, Y, X_m, Y_1, n) \\ &+ 64 \cdot f_{ik}(X, Y, X_m, Y_m, n) \\ &+ 40 \cdot f_{ik}(X, Y, X_m, Y_2, n) \\ &+ 25 \cdot f_{ik}(X, Y, X_2, Y_1, n) \\ &+ 40 \cdot f_{ik}(X, Y, X_2, Y_m, n) \\ &+ 25 \cdot f_{ik}(X, Y, X_2, Y_2, n) \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_m - A_2 \cdot \Delta X_m \\ X_2 &= X_m + A_2 \cdot \Delta X_m \\ Y_1 &= Y_m - A_2 \cdot \Delta Y_m \\ Y_2 &= Y_m + A_2 \cdot \Delta Y_m \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$A_2 = 0.774 \ 596 \ 669 \ 2$$

und:

$$f_{ik}(X, Y, X_k, Y_k, n) = \frac{u_i(nX_k) \cdot u_k(Y_k)}{[(X - X_k)^2 + (Y - Y_k)^2]^{3/2}} \quad (60)$$

### 5. Beispiele für vereinfachte Darstellung

Zur Orientierung über die gesuchte Dipolbelegung soll zunächst eine stark vereinfachte Darstellung der quadratischen Platte berechnet werden. Dazu wird die Platte in quadratische Teilflächen aufgeteilt, in denen die Dipolbelegung als konstant angenommen wird. Die Randbedingung wird in den Mittelpunkten der Teilflächen erfüllt.

Die von einem Quadrat mit einer konstanten Dipolbelegung an seinem Mittelpunkt induzierten Normalgeschwindigkeiten lassen sich nach Gleichung (49) berechnen. Es läßt sich außerdem zeigen, daß ein Quadrat der Seitenlänge  $2\Delta$  mit einer konstanten Dipolbelegung an einem Punkt außerhalb des Quadrats mit den relativen Koordinaten  $(X, Y)$ , bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats, die normierte Vertikalgeschwindigkeit induziert:

$$I(X, Y, \Delta) = \frac{\sqrt{(X-\Delta)^2 + (Y-\Delta)^2}}{(X-\Delta)(Y-\Delta)} - \frac{\sqrt{(X-\Delta)^2 + (Y+\Delta)^2}}{(X-\Delta)(Y+\Delta)} \\ - \frac{\sqrt{(X+\Delta)^2 + (Y-\Delta)^2}}{(X+\Delta)(Y-\Delta)} + \frac{\sqrt{(X+\Delta)^2 + (Y+\Delta)^2}}{(X+\Delta)(Y+\Delta)}$$

$$I(0, 0, \Delta) = -4\sqrt{2}/\Delta$$

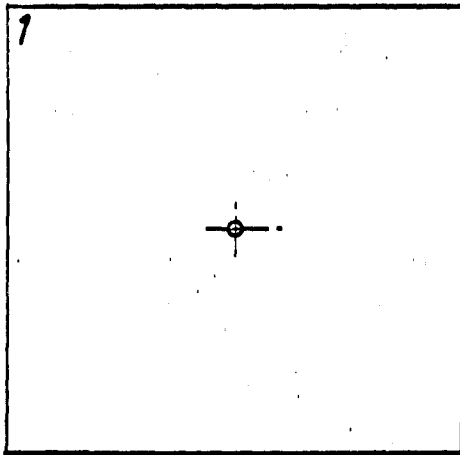
Die Dipolstärken bestimmt man dann aus einem Gleichungssystem äquivalent zu Gleichung (17):

$$\frac{v_z}{V} = -\frac{1}{2\pi} \sum_i m_i I_i$$

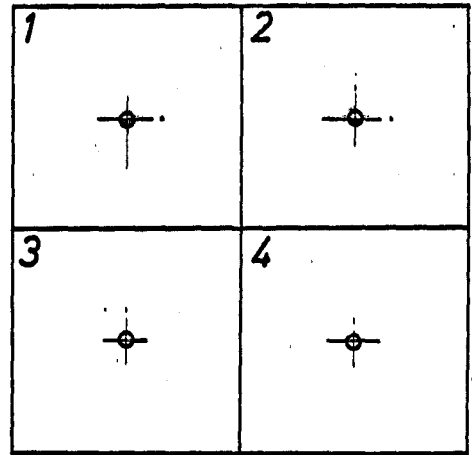
In den berechneten Beispielen wird das Quadrat durch 1, 4, 9 und 16 gleichgroße Teilquadrate dargestellt. Diese Aufteilungen sind im Diagramm 5 zusammengestellt.

Man errechnet für die normierte Dipolstärke  $M = m/2BV$  folgende Zahlenwerte, wobei sich die Indizes auf die Numerierung der Teilflächen im Diagramm 5 beziehen.

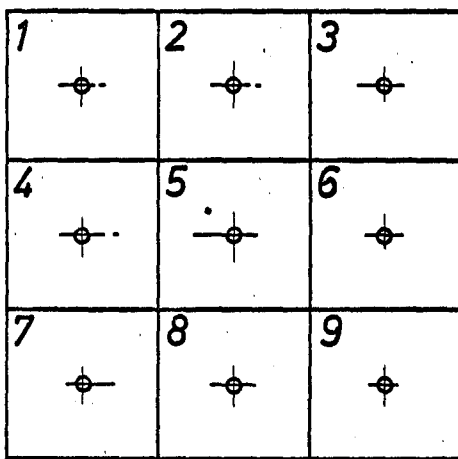
1) 1 Teilfläche	$M = 1,1107$
2) 4 Teilflächen	$M = 0,7866$



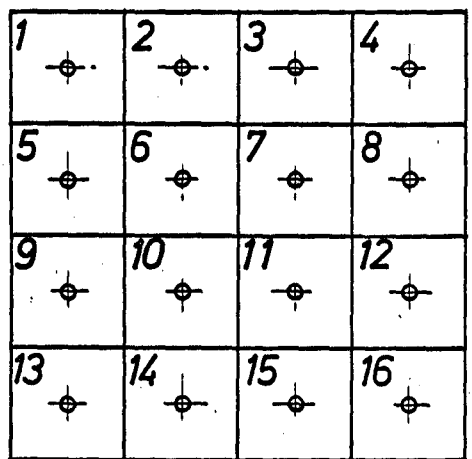
1 Teilfläche



4 Teilflächen



9 Teilflächen



16 Teilflächen

Diagramm 5

3) 9 Teilflächen	$M_1 = 0,6119$
	$M_2 = 0,7058$
	$M_5 = 0,8260$

Mittelwert:  $\bar{M} = 0,6774$

4) 16 Teilflächen	$M_1 = 0,5044$
	$M_2 = 0,6119$
	$M_6 = 0,7613$

Mittelwert:  $\bar{M} = 0,6222$

Der auf 4 Dezimalen exakt mit dem Ansatz aus Abschnitt 3. und 4. berechnete Mittelwert der Belegung:

$\bar{M} = 0,4547$

Ein Vergleich der Dipolordinaten in der Mitte der Platte (0,0) ergibt:

1) 1 Teilfläche	$M(0,0) = 1,1107$
2) 4 Teilflächen	$M(0,0) = 0,7866$
3) 9 Teilflächen	$M(0,0) = 0,8260$
4) 16 Teilflächen	$M(0,0) = 0,7613$

Auf 4 Dezimalen exakt berechnete

Dipolordinate in der Plattenmitte:  $M(0,0) = 0,6997$

Man erkennt aus den beiden Zusammenstellungen, daß die Ergebnisse für die Belegung zwar langsam, jedoch durchaus sichtbar gegen die exakte Lösung konvergieren. Zumindest für die Mittelordinate der Belegung erhält man mit diesem einfachen Ansatz bei geringem Rechenaufwand einen brauchbaren Anhalt. Dagegen wird die Belegung an den Rändern der Platte nur unvollkommen erfaßt. Dieser größere Fehler am Rande der Platte wirkt sich aber wegen des sehr schnellen Abklingens des Einflusses der Dipole mit wachsendem Abstand auf die Mittelordinate nur wenig aus.

## 6. Erstellung des Rechenprogramms

Zur Durchführung der Rechnungen nach dem in den Abschnitten 3. und 4. beschriebenen Verfahren wurde ein ALGOL - Programm erstellt, das im Anhang I wiedergegeben ist. Bei diesem Programm wurden folgende Anforderungen berücksichtigt:

Eingabe: Zur Charakterisierung der Aufgabe werden das Seitenverhältnis der Platte ( $\nu$ ), die Zahl der Aufpunkte ( $K$ ), an denen die Randbedingung erfüllt werden soll, sowie die Aufmaße dieser Aufpunkte in der Form  $(x/L, y/B)$  und die Normalkomponente der Plattengeschwindigkeit in der Form  $(v_z/V)$  an diesen Punkten eingegeben. Durch diese Maßnahme kann das Programm auch zur Darstellung der Strömung für einen beliebigen Bewegungszustand der Platte benutzt werden, wie er bei elastischen Vibrationen der Platte auftritt. Derartige Rechnungen wurden aber bisher nicht durchgeführt.

Zur Steuerung des Rechenaufwands kann die Seitenlänge  $2\Delta$  des Quadrats um den Aufpunkt vorgegeben werden. Das Programm sorgt selbst dafür, daß bei randnahen Punkten die Seitenlänge  $2\Delta$  nicht größer ist als der Abstand des Punktes vom Rand. Die Größe der Teilflächen, die im allgemeinen Quadrate sind, für die numerische Integration wird nach der Bedingung  $\Delta X_m = (X_m - X)^{1.3}/H$  bestimmt, wobei  $H$  mit den Eingabedaten vorgegeben wird. Es wird außerdem eine obere Grenze für die Teilflächen ( $\Delta X_{\max}$ ) eingegeben. Weiterhin werden die Zahlen  $M$  und  $N$ , die die Zahl der Glieder in der Summe für die Dipolbelegung in  $X$ - bzw.  $Y$ -Richtung angeben, als Parameter eingegeben. Die vorne bereits aufgeführte Zahl und Anordnung der Aufpunkte zur Erfüllung der Randbedingung kann ebenfalls als Parameter des Rechenaufwandes angesehen werden.

Ausgabe: Das Programm liefert als Ergebnisse die  $M \times N$  Koeffizienten für die Dipolbelegung  $A_{ik}$ , die Ordinaten der Dipolverteilung an vorgegebenen Punkten (vgl. Diagramm 6),  $M(X, Y)$ , sowie den Koeffizienten der hydrodynamischen Masse  $C$ . Außer diesem Koeffizienten  $C$  wird vom Programm ein Koeffizient für die hydrodynamische Masse entsprechend der Definition von Pabst (1930)<sup>8</sup> berechnet.

Anordnung der Rechnungen: Das Rechenprogramm bestimmt zunächst die Matrix der Einflußgrößen, und zwar ist es zweckmäßig, dabei stets gleichzeitig alle Einflußgrößen für einen der Aufpunkte zu bestimmen. Im Unterprogramm 'ALLE I' wird zunächst die Aufteilung der Fläche in die Teilflächen bestimmt, dazu wird eine Reihe von vorbereitenden Rechnungen durchgeführt. Die Aufteilung der Fläche beginnt am Quadrat um die Singularität, um das ein Ring von kleinen Quadraten und von rechteckigen Füllstücken gelegt wird (vgl. Diagramm 4). Dies Prinzip wird fortgesetzt, bis die Ränder der Fläche erreicht sind, wo die Teilung verfeinert wird. Für alle Quadraturen zu einem der Aufpunkte wird das gleiche Netz benutzt. Das Integral  $S_{ik}$  über das Quadrat um die Singularität wird mit Hilfe des Unterprogramms 'SINGIN' berechnet. Die Umrechnung der Hilfsintegrale  $I_{ik}$  in die Einflußgrößen erfolgt in einem besonderen Schritt im Unterprogramm 'JMN'. Das Unterprogramm 'U' kann die Tschebyscheff-Polynome 2. Art sowie dessen 2., 4. und 6. Ableitung liefern. Die Lösung des Gleichungssystems zur Bestimmung der Koeffizienten  $A_{ik}$  erfolgt im Programm 'WKM 2', das mit Rücksicht auf eine weitere Verwendung ebenfalls als Unterprogramm geschrieben ist. Übersteigt die Zahl der gegebenen Aufpunkte die Zahl der gesuchten Koeffizienten, so erfolgt ein Ausgleich nach der Bedingung, daß die Summe der Fehlerquadrate bei der Erfüllung der Randbedingung zu einem Minimum wird.

Die Berechnung der Dipolordinaten  $M$  sowie der Koeffizienten der hydrodynamischen Masse sowie die gesamte Ausgabe erfolgt im Rahmenprogramm.

Durch die besondere Auszeichnung der Plattenbreite  $2B$  (Y-Richtung) bei der dimensionslosen Schreibweise erhält man für einander zugeordnete Werte  $\kappa_1$  und  $1/\kappa_1$  nicht gleichlautende Ergebnisse, die sich jedoch leicht ineinander überführen lassen.

## 7. Allgemeine Eigenschaften des Verfahrens

Die Eigenschaften des Lösungsansatzes und des Rechenverfah-

rens wurden am Beispiel der quadratischen Platte ( $\nu = 1$ ) erkundet. Es zeigte sich, daß eine Änderung des Wertes  $H$ , durch die die Größe der Teilflächen relativ zu ihrem Abstand von der Singularität festgelegt wird, von  $H = 10$  auf  $H = 5$  bzw. eine Änderung von  $\Delta X_{\max}$ , das die obere Grenze für die halbe Seitenlänge der Teilflächen angibt, von  $\Delta X_{\max} = 0,05$  auf  $\Delta X_{\max} = 0,1$  jede für sich höchstens die fünfte Stelle der Koeffizienten  $A_{ik}$  beeinflusst. Das gleiche gilt für eine Änderung des Werts  $\Delta$  von  $\Delta = 0,05$  auf  $\Delta = 0,1$ , wenn man die Bedingung für die randnahen Punkte einhält. Es ist dadurch gezeigt, daß die Quadraturen mit einer bei weitem ausreichenden Genauigkeit erfolgen, wenn man wie in allen folgenden Beispielen  $H = 5$ ,  $\Delta X_{\max} = 0,1$  und  $\Delta = 0,1$  wählt. Bei den Koeffizienten  $A_{ik}$  können von dieser Seite her mindestens 4 Stellen nach dem Komma als gesichert gelten.

Die übrigen Variationen des Rechenaufwandes beeinflussen die Koeffizienten  $A_{ik}$  für die Dipolbelegung in einem so starken Maße, daß ein Vergleich der Koeffizienten kaum mehr zweckmäßig ist.

In den ersten beiden Serien-Rechnungen soll gezeigt werden, welchen Einfluß die Zahl der Funktionen im Lösungsansatz und die Zahl der Punkte, an denen die Randbedingung erfüllt wird, auf das Ergebnis hat. In der ersten Serie war die Zahl der Aufpunkte stets gleich der Zahl der gesuchten Koeffizienten, also  $K = M \cdot N$ , wobei in allen Fällen  $M = N$  war. Es wurden Beispiele mit  $M \cdot N = 1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 3, 4 \cdot 4, 5 \cdot 5$  und  $6 \cdot 6$  durchgerechnet, wobei der Rechenaufwand sonst gleich gehalten wurde. Die Aufpunkte zur Erfüllung der Randbedingung waren gleichmäßig verteilt (vgl. Diagramm 7, rechte Spalte). Die Ergebnisse der Rechnungen für die Koeffizienten  $A_{ik}$ , für die Ordinaten der Dipolbelegung  $M$  und für den Koeffizienten der hydrodynamischen Masse  $C$  sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt. Es ist zu beachten, daß der Verlauf der Koeffizienten  $A_{ik}$  innerhalb einer Spalte nicht direkt die Konvergenz der Reihe für die Belegung zeigt, weil die Funktionen  $F_i \cdot F_k$  nicht normiert wurden (vgl. Diagramm 2).

Man erkennt aus der Tabelle 1, daß die Zahl  $M \cdot N$  der Funktionen im Lösungsansatz erheblichen Einfluß auf die Größe der

Ergebnisse für die  $A_{jk}$  und für C

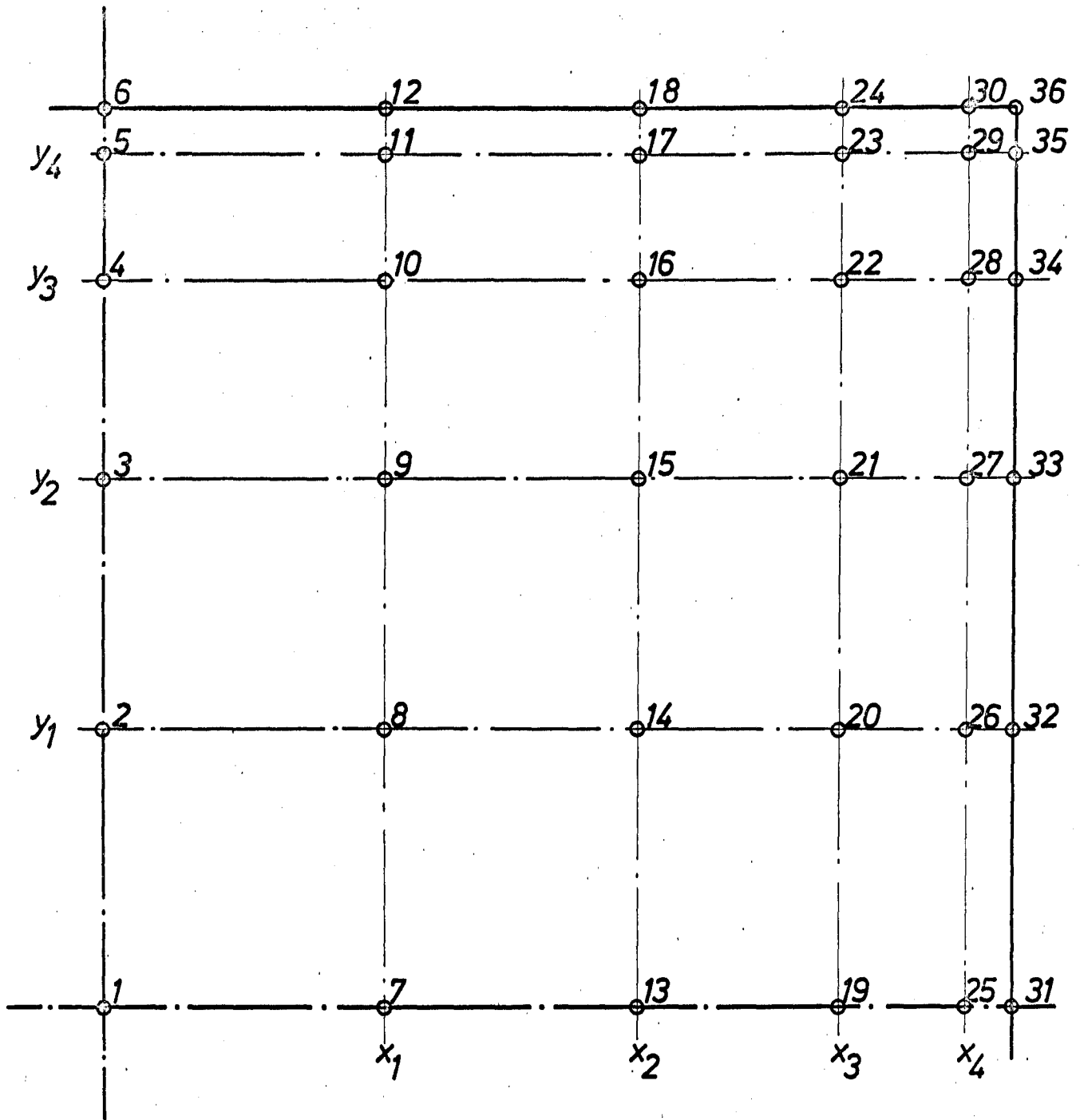
	K = 1 M = N = 1	K = 4 M = N = 2	K = 9 M = N = 3	K = 16 M = N = 4	K = 25 M = N = 5	K = 36 M = N = 6
$A_{00}$	.7320	.9626	1.0943	1.1919	1.2710	1.3382
$A_{10}$		.3138	.5558	.7444	.8993	1.0321
$A_{20}$			.1137	.2472	.3755	.4934
$A_{30}$				.0483	.1214	.2044
$A_{40}$					.0214	.0609
$A_{50}$						.0096
$A_{01}$		.3138	.5558	.7444	.8993	1.0320
$A_{11}$		.3504	.7941	1.1584	1.4622	1.7243
$A_{21}$			.2039	.4613	.7129	.9458
$A_{31}$				.0928	.2360	.3999
$A_{41}$					.0418	.1198
$A_{51}$						.0190
$A_{02}$			.1137	.2472	.3755	.4934
$A_{12}$			.2039	.4613	.7129	.9458
$A_{22}$			.0753	.2536	.4617	.6687
$A_{32}$				.0608	.1784	.3241
$A_{42}$					.0338	.1029
$A_{52}$						.0168
$A_{03}$				.0483	.1214	.2044
$A_{13}$				.0928	.2360	.3999
$A_{23}$				.0608	.1784	.3241
$A_{33}$				.0175	.0821	.1843
$A_{43}$					.0175	.0655
$A_{53}$						.0114
$A_{04}$					.0214	.0609
$A_{14}$					.0418	.1198
$A_{24}$					.0337	.1029
$A_{34}$					.0175	.0655
$A_{44}$					.0042	.0261
$A_{54}$						.0049
$A_{05}$						.0096
$A_{15}$						.0190
$A_{25}$						.0168
$A_{35}$						.0114
$A_{45}$						.0049
$A_{55}$						.0010
C	.57488	.57837	.57888	.57896	.57900	.57901

Tabelle 1

Ergebnisse für die Dipolaufmaße M

	K = 1 M = N = 1	K = 4 M = N = 2	K = 9 M = N = 3	K = 16 M = N = 4	K = 25 M = N = 5	K = 36 M = N = 6
M <sub>1</sub>	.731 96	.699 92	.699 69	.699 71	.699 71	.699 72
M <sub>2</sub>	.696 13	.670 53	.670 67	.670 69	.670 70	.670 70
M <sub>3</sub>	.592 16	.581 21	.581 91	.581 92	.581 92	.581 93
M <sub>4</sub>	.430 23	.431 99	.432 67	.432 58	.432 59	.432 59
M <sub>5</sub>	.226 19	.231 24	.231 52	.231 35	.231 38	.231 38
M <sub>6</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>7</sub>	.696 13	.670 53	.670 67	.670 69	.670 70	.670 70
M <sub>8</sub>	.662 06	.643 62	.643 71	.643 69	.643 70	.643 70
M <sub>9</sub>	.563 18	.560 64	.560 47	.560 50	.560 50	.560 51
M <sub>10</sub>	.409 18	.419 14	.418 55	.418 63	.418 63	.418 64
M <sub>11</sub>	.215 12	.225 38	.224 78	.224 76	.224 75	.224 76
M <sub>12</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>13</sub>	.592 16	.581 21	.581 91	.581 92	.581 92	.581 93
M <sub>14</sub>	.563 18	.560 64	.560 47	.560 50	.560 50	.560 51
M <sub>15</sub>	.479 07	.494 47	.493 40	.493 45	.493 46	.493 46
M <sub>16</sub>	.348 07	.375 02	.374 83	.374 64	.374 66	.374 67
M <sub>17</sub>	.182 99	.203 86	.204 61	.204 20	.204 09	.204 09
M <sub>18</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>19</sub>	.430 23	.431 99	.432 67	.432 58	.432 59	.432 59
M <sub>20</sub>	.409 18	.419 14	.418 55	.418 63	.418 63	.418 64
M <sub>21</sub>	.348 07	.375 02	.374 83	.374 64	.374 66	.374 67
M <sub>22</sub>	.252 88	.289 06	.293 63	.293 91	.293 90	.293 93
M <sub>23</sub>	.132 95	.159 02	.165 32	.166 72	.166 85	.166 75
M <sub>24</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>25</sub>	.226 19	.231 24	.231 52	.231 35	.231 38	.231 38
M <sub>26</sub>	.215 12	.225 38	.224 78	.224 76	.224 75	.224 76
M <sub>27</sub>	.182 99	.203 86	.204 61	.204 20	.204 09	.204 09
M <sub>28</sub>	.132 95	.159 02	.165 32	.166 72	.166 85	.166 75
M <sub>29</sub>	.069 90	.088 24	.095 97	.099 94	.102 04	.103 14
M <sub>30</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>31</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>32</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>33</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>34</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>35</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>36</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
	.012 01	.001 21	.000 35	.000 10	.000 04	- - -

Tabelle 2



$$x_1/L = y_1/B = \sin 18^\circ \cong 0.30902$$

$$x_2/L = y_2/B = \sin 36^\circ \cong 0.58779$$

$$x_3/L = y_3/B = \sin 54^\circ \cong 0.80902$$

$$x_4/L = y_4/B = \sin 72^\circ \cong 0.95106$$

Diagramm 6

Koeffizienten  $A_{ik}$  der Belegung<sup>hat</sup>. Man kann bei ihnen eine gewisse sehr langsame Konvergenz mit steigendem Rechenaufwand erkennen. Es ist jedoch nicht möglich, an Hand der Beispiele die exakten Werte für die Koeffizienten abzuschätzen, oder zu <sup>zeigen</sup> beweisen, daß sie existieren. Dagegen ist die Konvergenz der Dipolordinaten (Tabelle 2) und der Koeffizienten C (letzte Zeile der Tabelle 1) sehr ausgeprägt. Im Beispiel mit dem höchsten Rechenaufwand ( $K=36$  und  $M=N=6$ ) ist der Fehler von C mit Sicherheit kleiner als eine Einheit der fünften Stelle. Im dritten Beispiel ( $K=9$  und  $M=N=3$ ) ist der Fehler des Wertes C nur etwas größer als 0,0001, und das sind 0,02 %.

Zur Verdeutlichung der Konvergenz der Dipolordinaten wurde für jedes Rechenbeispiel die gemittelte absolute Differenz der Ordinaten gegenüber den Werten in der letzten Spalte, die die genauesten überhaupt berechneten Ergebnisse sind, berechnet. Die gemittelte absolute Differenz findet sich jeweils in der letzten Zeile der Tabelle 2. Sie stellt nicht einen mittleren absoluten Fehler der Dipolbelegung dar, weil die Punkte, zu denen die Ordinaten in Tabelle 2 gehören, zum Rande der Platte hin konzentriert sind, wie man aus dem Diagramm 6 erkennt. Die randnahen Punkte sind aber mit größeren Fehlern behaftet.

Die gemittelten absoluten Differenzen zeigen ebenfalls die gute Konvergenz. Im dritten Beispiel beträgt dieser Wert nur 0,00035, das sind etwa 0,1 %. Die meisten Ordinaten sind wesentlich genauer - sie weisen bis zu 4 gesicherte Stellen auf - während der Fehler bei  $M_{29}$  bis auf etwa 8 % ansteigt.

In der zweiten Serie von Beispielrechnungen wurde der Reihenansatz für die Lösung nicht verändert ( $M=N=4$ ). Zur Erfüllung der Randbedingung wurden  $K=16, 25, 36$  und  $49$  Aufpunkte benutzt. Die Ergebnisse sind entsprechend der Anordnung der Ergebnisse der ersten Serie in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt. Auch in der Tabelle 4 wurde die mittlere absolute Differenz der Ordinaten berechnet, und zwar wurden die Differenzen wieder gegenüber der letzten Spalte der Tabelle 2 bestimmt ( $K=36, M=N=6$ ).

Die Tabellen 3 und 4 zeigen folgendes Ergebnis: Die Koeffi-

Ergebnisse für die  $A_{ik}$  und für C

	K = 16 M = N = 4	K = 25 M = N = 4	K = 36 M = N = 4	K = 49 M = N = 4
$A_{00}$	1.1919	1.2208	1.2431	1.2606
$A_{10}$	.7444	.8006	.8441	.8784
$A_{20}$	.2472	.2910	.3261	.3543
$A_{30}$	.0483	.0678	.0850	.0997
$A_{01}$	.7444	.8006	.8441	.8784
$A_{11}$	1.1584	1.2679	1.3530	1.4202
$A_{21}$	.4613	.5467	.6153	.6704
$A_{31}$	.0928	.1306	.1643	.1931
$A_{02}$	.2472	.2910	.3261	.3543
$A_{12}$	.4613	.5467	.6153	.6704
$A_{22}$	.2536	.3203	.3755	.4207
$A_{32}$	.0608	.0903	.1173	.1407
$A_{03}$	.0483	.0678	.0850	.0997
$A_{13}$	.0928	.1306	.1643	.1931
$A_{23}$	.0608	.0903	.1173	.1407
$A_{33}$	.0175	.0304	.0434	.0552
C	.57896	.57898	.57900	.57901

Tabelle 3

Ergebnisse für die Dipolauflaße M

	K = 16 M = N = 4	K = 25 M = N = 4	K = 36 M = N = 4	K = 49 M = N = 4
M <sub>1</sub>	.699 71	.699 71	.699 72	.699 73
M <sub>2</sub>	.670 69	.670 69	.670 69	.670 69
M <sub>3</sub>	.581 92	.581 93	.581 95	.581 96
M <sub>4</sub>	.432 58	.432 57	.432 56	.432 55
M <sub>5</sub>	.231 35	.231 30	.231 24	.231 17
M <sub>6</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>7</sub>	.670 69	.670 69	.670 69	.670 69
M <sub>8</sub>	.643 69	.643 70	.643 71	.643 71
M <sub>9</sub>	.560 50	.560 49	.560 48	.560 48
M <sub>10</sub>	.418 63	.418 65	.418 66	.418 68
M <sub>11</sub>	.224 76	.224 83	.224 90	.224 97
M <sub>12</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>13</sub>	.581 92	.581 93	.581 95	.581 96
M <sub>14</sub>	.560 50	.560 49	.560 49	.560 48
M <sub>15</sub>	.493 45	.493 48	.493 50	.493 51
M <sub>16</sub>	.374 64	.374 62	.374 62	.374 62
M <sub>17</sub>	.204 20	.204 06	.203 96	.203 89
M <sub>18</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>19</sub>	.432 58	.432 57	.432 56	.432 55
M <sub>20</sub>	.418 63	.418 65	.418 66	.418 68
M <sub>21</sub>	.374 64	.374 62	.374 62	.374 62
M <sub>22</sub>	.293 91	.293 96	.293 96	.293 96
M <sub>23</sub>	.166 72	.166 93	.167 01	.167 04
M <sub>24</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>25</sub>	.231 35	.231 30	.231 24	.231 17
M <sub>26</sub>	.224 76	.224 83	.224 90	.224 97
M <sub>27</sub>	.204 20	.204 06	.203 96	.203 89
M <sub>28</sub>	.166 72	.166 93	.167 01	.167 04
M <sub>29</sub>	.099 94	.100 97	.101 72	.102 28
M <sub>30</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>31</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>32</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>33</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>34</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>35</sub>	.0	.0	.0	.0
M <sub>36</sub>	.0	.0	.0	.0
	.000 10	.000 09	.000 09	.000 09

Tabelle 4

zienten  $A_{ik}$  der Dipolbelegung werden durch die zusätzlichen Aufpunkte merklich verändert, und zwar verändern sie sich bei zunehmender Zahl von Aufpunkten in Richtung auf die vermuteten exakten Werte. Die Koeffizienten  $C$  für die hydrodynamische Masse werden durch die Überbestimmung ebenfalls verbessert. Aus der Zusammenstellung der Ergebnisse für die Dipolordinaten kann man erkennen, was bei der Überbestimmung geschieht. Die gemittelten absoluten Differenzen ändern sich nur unwesentlich. Im einzelnen werden die Ordinaten in der Plattenmitte mit zunehmender Zahl von Aufpunkten immer ungenauer, während die Abweichung von den Bezugswerten am Rande in gleichem Maße abnimmt. Dies wird verständlich, wenn man sich folgende zwei Eigenschaften des Verfahrens verdeutlicht: (1) Durch die Zahl der Funktionen im Lösungsansatz liegt die Flexibilität der Lösung fest. Verbesserungen in irgendeinem Bereich der Platte müssen mit Verschlechterungen in anderen Bereichen erkauft werden. (2) Bei der gewählten Belegung mit Dipolsingularitäten klingen die Einflüsse mit wachsendem Abstand von der Singularität sehr schnell ab. Ein Dipolelement beeinflusst nur seine nähere Umgebung. Umgekehrt wird dann die Dipolstärke an einem Punkt im wesentlichen durch die Randbedingungen in der Nähe dieses Punktes bestimmt. Wird also die Zahl der Aufpunkte zur Erfüllung der Randbedingung vergrößert, so kommen die Punkte näher an den Rand der Platte, während in der Plattenmitte zusätzliche Information vorliegt, die aber wenig Neues bringt. Daher wird Belegung am Rande der Platte genauer bestimmt. Insgesamt wirkt sich das günstig auf die Genauigkeit des Koeffizienten  $C$  aus.

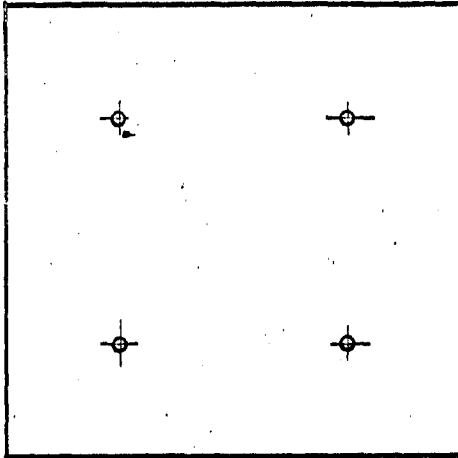
Zur Beurteilung der Serien-Rechnungen ist die Erfahrung wichtig, daß für die beiden Beispiele mit  $K=36$ ,  $M=N=6$  und mit  $K=49$ ,  $M=N=4$  etwa die gleiche Rechenzeit erforderlich ist. Es ist dann aber günstiger, einen möglichst flexiblen Ansatz für die Lösung, also möglichst großes  $M$  und  $N$  zu wählen, und mit der minimalen Zahl von Aufpunkten zu rechnen. Bei den Rechnungen mit systematisch veränderten Seitenverhältnissen  $N$  lag diese Erfahrung noch nicht vor, daher wurden diese Rechnungen so durchgeführt, daß die Zahl der Aufpunkte und damit der Randbedingungen die Zahl der gesuchten Koeffizienten merklich überstieg.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Verfahrens ist der deutliche Einfluß der Anordnung der Aufpunkte, an denen die Randbedingung erfüllt wird. Dies wird in einer weiteren Serie von Rechnungen untersucht, wobei zwei verschiedene Anordnungen der Punkte benutzt werden, die im Diagramm 7 zusammengestellt sind. Die Beispiele mit der gleichmäßigen Verteilung der Punkte auf der Platte sind die gleichen Rechnungen, wie in der ersten Vergleichsserie (Tabelle 1 und 2). In der zweiten Gruppe von Rechnungen ist die Teilung gleichmäßig in den Variablen  $\varphi = \arcsin x$  bzw.  $\psi = \arcsin y$ . Die Punkte sind also stärker zum Rande der Platte hin konzentriert.

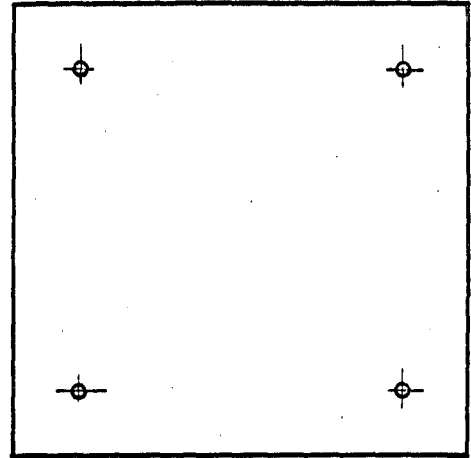
Die Gegenüberstellung der beiden Gruppen von Ergebnissen in Tabelle 5 zeigt den überraschend großen Einfluß der Anordnung der Punkte. Das gilt besonders die Koeffizienten  $A_{ik}$ , wobei die zum Rande hin verdichtete Anordnung Werte liefert, die näher an den vermuteten exakten Werten liegen. Die Ergebnisse für die Dipolordinate in der Mitte der Platte,  $M(0,0) = M_1$ , und für den Koeffizienten der hydrodynamischen Masse,  $C$ , aus beiden Gruppen nähern sich mit steigendem Rechenaufwand der vermutlichen exakten Lösung, jeweils jedoch von verschiedenen Richtungen und verschieden schnell. Man kann daraus schließen, daß eine optimale Anordnung der Aufpunkte zwischen den beiden untersuchten Gruppen liegt, und zwar näher an der gleichmäßigen Verteilung. Es war jedoch nicht das Ziel der Untersuchungen, eine optimale Punktanordnung zu ermitteln.

Aus der oben besprochenen Eigenschaft der Einflußfunktion eines Dipols, nämlich ihres sehr schnellen Abklingens mit wachsendem Abstand von der Singularität, folgte, daß die Belegung in der Nähe der benutzten Aufpunkte besonders gut berechnet wird. Bei der gleichmäßigen Verteilung wird der gesamte Bereich der Platte recht genau bestimmt, nur die Randzonen werden ziemlich ungenau, wie das die Tabelle 2 zeigt. Dem entspricht auch die bessere Konvergenz der Mittelordinate der Dipolbelegung und des Koeffizienten  $C$ . Bei der zum Rande hin konzentrierten Anordnung wird von vornherein die Belegung am Rande der Platte besser erfaßt, natürlich zu Lasten der Genauigkeit im übrigen Bereich. Dies belegen die hier nicht wiedergegebenen Ergebnisse für die

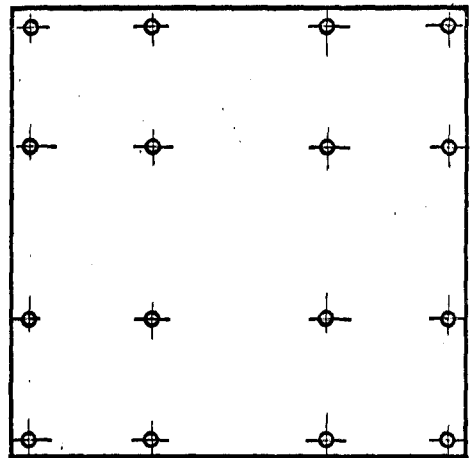
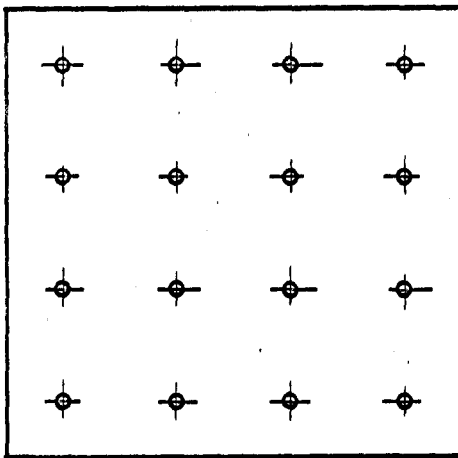
1. Gruppe  
gleichmäßige Teilung



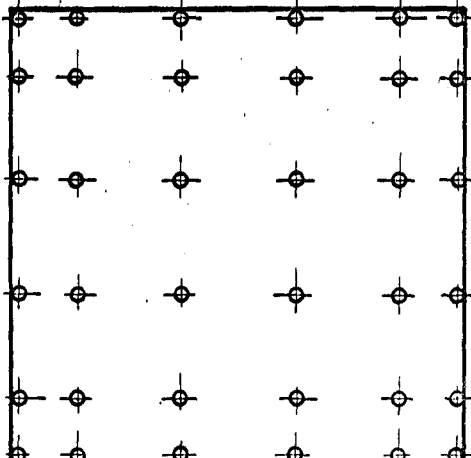
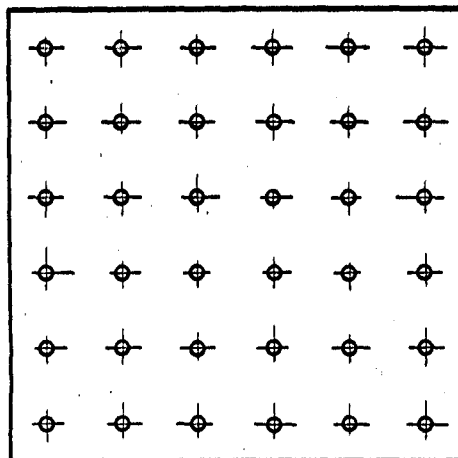
2. Gruppe  
zum Rand hin verdich-  
tete Teilung



$M = 1, N = 1$



$M = 2, N = 2$



$M = 3, N = 3$

	Gleichmäßige Verteilung				Zum Rande hin verdichtete Verteilung			
	K = 1 M = N = 1	K = 4 M = N = 2	K = 9 M = N = 3	K = 16 M = N = 4	K = 1 M = N = 1	K = 4 M = N = 2	K = 9 M = N = 3	K = 16 M = N = 4
A <sub>00</sub>	.7320	.9626	1.0943	1.1919	.8446	1.1458	1.3474	1.5060
A <sub>10</sub>		.3138	.5558	.7444		.6381	1.0447	1.3628
A <sub>20</sub>			.1137	.2472			.4544	.7813
A <sub>30</sub>				.0483				.3749
A <sub>01</sub>		.3138	.5558	.7444		.6381	1.0447	1.3628
A <sub>11</sub>		.3504	.7941	1.1584		.9245	1.7388	2.3762
A <sub>21</sub>			.2039	.4613			.8622	1.5135
A <sub>31</sub>				.0928				.7362
A <sub>02</sub>			.1137	.2472			.4544	.7813
A <sub>12</sub>			.2039	.4613			.8622	1.5135
A <sub>22</sub>			.0753	.2536			.5318	1.1637
A <sub>32</sub>				.0608				.6178
A <sub>03</sub>				.0483				.3749
A <sub>13</sub>				.0928				.7362
A <sub>23</sub>				.0608				.6178
A <sub>33</sub>				.0176				.3583
M <sub>1</sub>	.7320	.6999	.6997	.6997	.8446	.7059	.7009	.7002
C	.5749	.5784	.5789	.5790	.6634	.5803	.5792	.5791

Tabelle 5

anderen Dipolordinaten.

Durch die Rechnungen konnte gezeigt werden, daß sich die Dipolbelegung und die aus ihr abgeleiteten Größen mit guter Genauigkeit berechnen lassen, z.B. durch einen Lösungsansatz mit 9 Funktionen. Die gleichmäßige Verteilung der Punkte stellt zwar nicht das denkbare Optimum dar, jedoch ist auch mit dieser Anordnung die Qualität der Ergebnisse sehr zufriedenstellend. Auch mit sehr großem Rechenaufwand ist es nicht möglich, eine brauchbare Abschätzung für die Koeffizienten der Reihe für die Belegung zu bestimmen.

### 8. Darstellung der Ergebnisse

Mit Hilfe des Rechenprogramms wurden die Dipolbelegungen  $M$  und die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse  $C$  für eine Reihe von rechteckigen Platten mit Seitenverhältnissen  $\kappa$  zwischen 0,1 und 1 berechnet. Da die  $y$ -Richtung durch die Wahl der Bezugsgröße  $B$  gegenüber der  $x$ -Richtung ausgezeichnet ist, erhält man für die zugeordneten Seitenverhältnisse  $\kappa$  und  $1/\kappa$  keine gleichlautenden Ergebnisse. Eine Umrechnung ist jedoch sehr einfach. Es gilt:

$$M(x, y, \kappa) = \frac{1}{\kappa} M\left(\frac{1}{\kappa} y, \frac{1}{\kappa} x, \frac{1}{\kappa}\right)$$
$$C(\kappa) = \frac{1}{\kappa} C\left(\frac{1}{\kappa}\right)$$

In der Tabelle 6 sind die Seitenverhältnisse für die berechneten Platten, die Angaben über die Parameter der Rechnung und die erforderliche Rechenzeit auf der Rechenanlage TR 4 des Rechenzentrums der Universität Hamburg zusammengestellt. In allen Beispielen wurden gleichmäßige Teilungen für die Anordnung der Aufpunkte benutzt. Die Zahlen für die Seitenverhältnisse entsprechen der Normzahlenreihe R 10; die reziproken Werte entsprechen dann nicht in allen Fällen genau den Normzahlen.

Das Programm ist auch für Seitenverhältnisse  $\kappa > 1$  geeignet,

also für Rechtecke, die ihre Längenausdehnung in Richtung der y-Achse haben. Die Ergebnisse für  $\kappa > 1$  wurden jedoch nicht getrennt berechnet, sondern durch Spiegelung mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen bestimmt.

$\kappa$	$\Delta$	$\Delta x$	H	M	N	K	[sec] <sup>+</sup>
0,1	0,1	0,1	5	6	3	6 3	2750
0,125	0,1	0,1	5	5	3	8 3	2822
0,16	0,1	0,1	5	5	3	8 3	2402
0,2	0,1	0,1	5	5	3	8 3	2167
0,25	0,1	0,1	5	5	3	8 3	1954
0,315	0,1	0,1	5	5	3	6 4	1916
0,4	0,1	0,1	5	5	3	6 4	1537
0,5	0,04	0,1	5	4	3	7 7	2358
0,63	0,04	0,1	5	4	3	6 4	1910
0,8	0,04	0,1	5	4	3	6 4	1810
1,0	0,04	0,1	5	4	4	7 7	3174

+ ) Rechenzeitverbrauch

Tabelle 6

Es soll zunächst das Ergebnis für die Koeffizienten  $C(\kappa)$  betrachtet werden, und zwar für den Bereich  $0,1 \leq \kappa \leq 10$ . Sie sind in der Tabelle 7 und im Diagramm 8 zusammengestellt. Den Ergebnissen der Rechnung sind die Meßergebnisse von Pabst (1930)<sup>8</sup> und von Yu (1945)<sup>12</sup> gegenübergestellt, dazu wurden die veröffentlichten Original-Meßergebnisse neu ausgewertet. Zum Vergleich werden außerdem die Formeln von Pabst und von Yu benutzt. In der hier bevorzugten Schreibweise für die dimensionslosen Größen nehmen die Formeln folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 C(\kappa) &= 1 - 0,5 \cdot \kappa && \text{für } \kappa < 0,5 \\
 C(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \left( 1 - \frac{0,5}{\kappa} \right) && \text{für } \kappa > 2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} C(\kappa) \\ C(\kappa) \end{aligned}} \right\} \text{ nach Pabst}$$

$$C(\kappa) = (1 + \kappa^2)^{-1/2} \quad \text{nach Yu}$$

Die Formel von Pabst ist nur für Seitenverhältnisse von  $\kappa \approx 0,5$  an abwärts brauchbar. Die Formel für Werte  $\kappa > 2$  wurde durch Spiegelung gewonnen.

Zum Vergleich sind schließlich auch die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse für elliptische Platten  $C_0(\kappa)$  angegeben. In Anlehnung an die Definition von  $C$  ist  $C_0$  auch so definiert, daß es der Korrekturfakturfaktor bei Anwendung der Streifenmethode ist (vgl. Gleichung (A.5) im Anhang II). Es gilt:

$$C_0(\kappa) = \frac{M_0''}{4\pi/3 \cdot \rho L B^2} = \frac{1}{E(\kappa')} \quad \text{für } \kappa \leq 1$$
$$\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

Diese Formel gilt nur für  $\kappa$ -Werte  $\kappa \leq 1$ . Bei der elliptischen Platte ist  $\kappa$  das Verhältnis der beiden Hauptachsen. Für  $\kappa > 1$  wurde  $C_0$  ebenfalls durch Spiegelung bestimmt.

Aus der Tabelle 7 und dem Diagramm 8 erkennt man die ungewöhnlich gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Rechnung und den Meßergebnissen von Pabst sowie der daraus abgeleiteten Formel. Dagegen weichen die Meßergebnisse von Yu erheblich, nämlich um bis zu 22 %, von den Ergebnissen der Rechnung ab. Bei diesem Vergleich muß man noch beachten, daß Yu seine Meßergebnisse auf den Fall verschwindender Plattendicke reduziert, während eine solche Korrektur bei Pabst nicht gemacht wird. Eine Erklärung für die starke Abweichung der Yuschen Messungen kann in den sehr niedrigen Frequenzen zwischen 0,1 und 0,3 Hz liegen. Man sollte erwarten, daß die Pabstschen Messungen bei Frequenzen zwischen 30 und 100 Hz die Voraussetzungen der theoretischen Ansätze gut erfüllen.

Es ist überraschend, daß die theoretischen  $C_0$ -Werte gut mit den Meßergebnissen von Yu übereinstimmen. Im übrigen ist der Kurvenverlauf für die elliptische Platte und für die Rechteckplatte ~~sehr~~ ähnlich. Eine Besonderheit zeigt die  $C_0(\kappa)$ -Kurve im Bereich um  $\kappa = 1,0$ , die typisch für elliptische Platten ist. Bei der  $C(\kappa)$ -Kurve für die Rechteckplatte ist eine entsprechende Besonderheit nicht vorhanden.

$\kappa$	Pabst (1930) <sup>8</sup>		Yu (1945) <sup>12</sup>		Rechnung	Ellipse C <sub>0</sub>
	Formel	Messung	Formel	Messung <sup>+</sup>		
0,1	0,95		0,995		0,9469	0,9920
0,125	0,9375		0,9925		0,9344	0,9876
0,16	0,92		0,9875		0,9167	0,9805
0,2	0,9		0,9805		0,8965	0,9720
0,25	0,875	0,875	0,9705		0,8718	0,9594
0,315	0,8425		0,954		0,8404	0,9422
0,3333..	0,8333	0,814	0,9487	0,955		
0,4	0,8		0,9285		0,8009	0,9166
0,5	0,75	0,733	0,8945	0,911	0,7568	0,8838
0,5714..			0,8688	0,882		
0,63	(0,685)		0,8465		0,7038	0,8375
0,6666..			0,8321	0,823		
0,8	(0,6)		0,7808		0,6419	0,7702
1,0	(0,5)	0,565	0,7070	0,694	0,5790	0,6366
1,25	(0,48)		0,6245		0,5135	0,6161
1,5			0,5547	0,549		
1,5873..	(0,4316)		0,5330		0,4434	0,5276
1,75			0,4961	0,504		
2,0	0,375	0,3665	0,4471	0,456	0,3784	0,4419
2,5	0,32		0,3739		0,3204	0,3666
3,0	0,2778	0,2712	0,3162	0,318		
3,1746..	0,2654		0,3003		0,2647	0,2968
4,0	0,2188	0,2180	0,2425		0,2180	0,2400
5,0	0,18		0,1961		0,1793	0,1944
6,25	0,1472		0,1580		0,1467	0,1569
8,0	0,1172		0,1240		0,1168	0,1235
10,0	0,095		0,0995		0,0947	0,0992

+ ) korrigiert für verschwindende Plattendicke, wie bei Yu angegeben

Tabelle 7

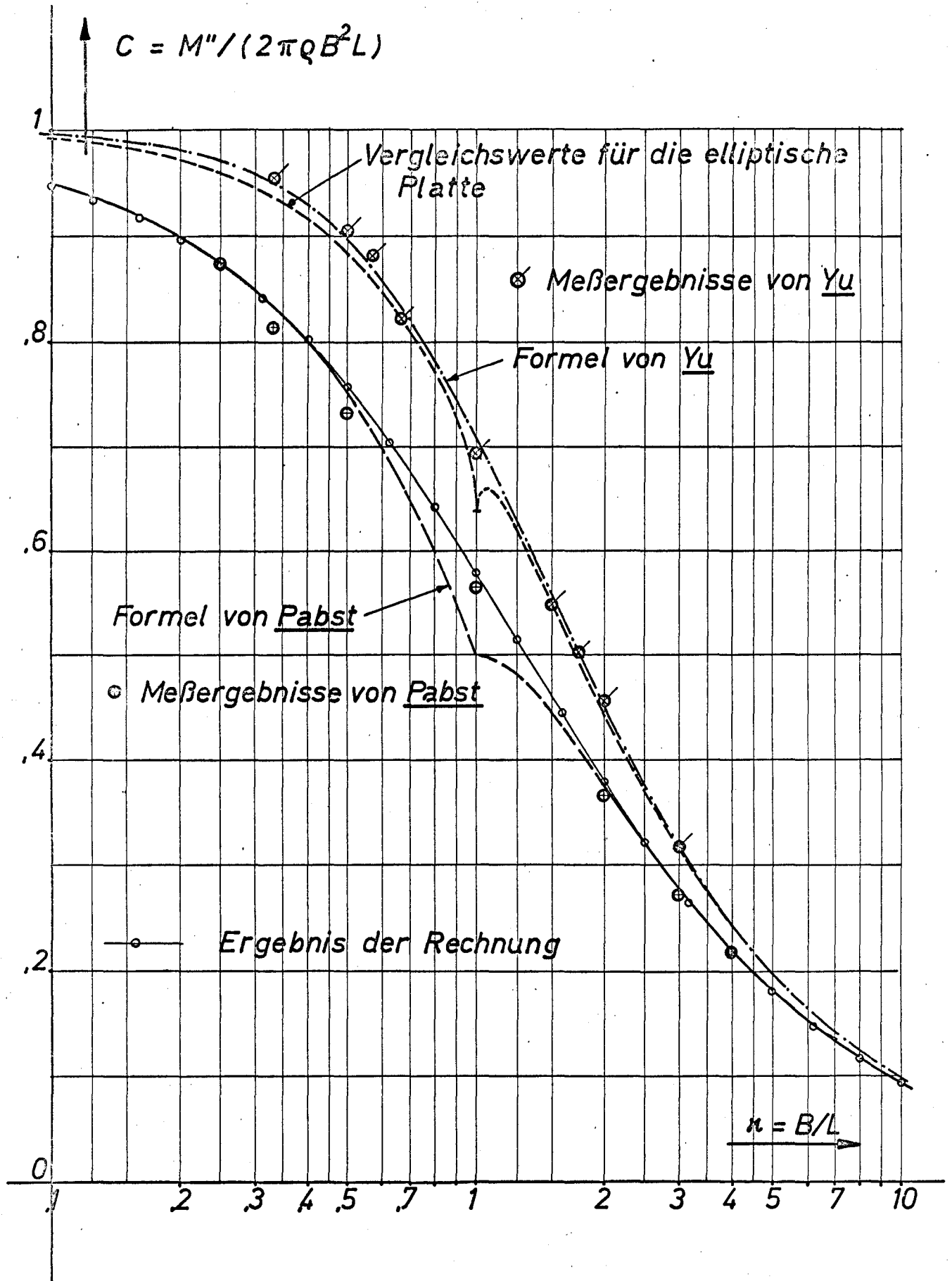


Diagramm 8

Als zweites wichtiges Ergebnis soll die Dipolbelegung in der normierten Form  $M = m / 2BV$  behandelt werden. Aus Gleichung (29) ersieht man, daß die Verteilung der instationären Anteile des Drucks bei beschleunigter Translation der Dipolverteilung proportional ist. Alle Aussagen, die im folgenden über die Dipolbelegung gemacht werden, gelten in gleicher Weise auch für die instationären Drücke an der Platte.

Die mit dem Rechenprogramm berechneten Dipolordinaten  $M$  sind für die Seitenverhältnisse von  $\kappa = 0,1$  bis  $\kappa = 1$  in den Tabellen 9a und 9b zusammengestellt. Aus den Erfahrungen der Rechnungen im Abschnitt 7. für die quadratische Platte kann man ableiten, daß die Fehler der angegebenen Ordinaten im allgemeinen höchstens eine Einheit der dritten Stelle beträgt. Eine Ausnahme stellt die Ordinate  $M_{29}$  dar, bei der der Fehler im Falle des Quadrats bei dem vergleichbaren Rechenaufwand ( $M = N = 3$ ) etwa 0,004 erreichte.

Eine erste Auswertung der Tabellen 9 erfolgt in der Tabelle 10 und im Diagramm 9. Hier sind die Dipolordinaten  $M(0,0)$  in der Mitte der Platte aufgetragen. Zum Vergleich sind auch die in gleicher Weise normierten Dipolordinaten in der Mitte der elliptischen Platte angegeben. Man erkennt die recht gute Übereinstimmung dieser beiden Werte - mit Ausnahme des Bereichs um den Wert  $\kappa = 1$ , wo auch die Mittelordinate für die elliptische Platte die gleiche Besonderheit aufweist wie schon die Kurve  $C_0(\kappa)$ . Die größte Differenz zwischen den beiden Kurven außerhalb des Bereichs um  $\kappa = 1$  beträgt 1,7 %. Eine so gute Übereinstimmung war besonders für etwas länger gestreckte Rechtecke und Ellipsen zu erwarten. Der Grund dafür ist der, daß die Dipolbelegung stets im wesentlichen durch die nächste Umgebung bestimmt wird, die sich aber nur wenig unterscheidet.

In der Tabelle 10 sind zur Charakterisierung noch zwei weitere Größen angegeben, und zwar die Völligkeit  $\varphi$  und die mittlere Dipolordinate  $\bar{M}$  bzw.  $\bar{M}_0$ . Die Dipolbelegung für die Ellipsenplatte immer ein Ellipsoid. Alle Schnitte durch die Belegung sind dann Ellipsen. Die Völligkeit dieses Ellipsoids beträgt in allen Fällen  $\varphi_0 = 2/3$ .

$\nu =$	0,1	0,125	0,16	0,2	0,25	0,315
M <sub>1</sub>	.997	.995	.991	.985	.975	.958
M <sub>2</sub>	.948	.947	.943	.937	.928	.912
M <sub>3</sub>	.807	.805	.802	.797	.789	.776
M <sub>4</sub>	.586	.585	.583	.579	.574	.564
M <sub>5</sub>	.308	.308	.307	.304	.302	.297
M <sub>6</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>7</sub>	.996	.993	.987	.979	.965	.944
M <sub>8</sub>	.947	.944	.939	.931	.918	.898
M <sub>9</sub>	.806	.803	.799	.792	.782	.765
M <sub>10</sub>	.585	.583	.580	.576	.568	.557
M <sub>11</sub>	.308	.307	.305	.303	.299	.293
M <sub>12</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>13</sub>	.988	.980	.966	.947	.920	.885
M <sub>14</sub>	.940	.932	.919	.901	.876	.843
M <sub>15</sub>	.799	.793	.782	.768	.748	.721
M <sub>16</sub>	.581	.577	.569	.559	.545	.527
M <sub>17</sub>	.305	.303	.300	.294	.287	.278
M <sub>18</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>19</sub>	.941	.914	.875	.833	.786	.732
M <sub>20</sub>	.896	.870	.834	.795	.751	.700
M <sub>21</sub>	.764	.743	.714	.683	.648	.608
M <sub>22</sub>	.557	.542	.523	.502	.479	.452
M <sub>23</sub>	.293	.286	.276	.267	.255	.242
M <sub>24</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>25</sub>	.684	.632	.574	.524	.475	.428
M <sub>26</sub>	.654	.607	.553	.505	.459	.414
M <sub>27</sub>	.566	.529	.486	.445	.408	.370
M <sub>28</sub>	.419	.397	.368	.339	.316	.288
M <sub>29</sub>	.224	.215	.201	.186	.176	.162
M <sub>30</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>31</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>32</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>33</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>34</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>35</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>36</sub>	.0	.0	.0	.0	.0	.0

Tabelle 9a

$\kappa =$	0,4	0,5	0,63	0,8	1,0
M <sub>1</sub>	.931	.893	.841	.774	.700
M <sub>2</sub>	.886	.851	.802	.739	.671
M <sub>3</sub>	.755	.726	.687	.637	.582
M <sub>4</sub>	.550	.530	.503	.469	.433
M <sub>5</sub>	.289	.279	.266	.249	.231
M <sub>6</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>7</sub>	.911	.869	.814	.745	.671
M <sub>8</sub>	.867	.829	.777	.712	.644
M <sub>9</sub>	.740	.709	.667	.615	.561
M <sub>10</sub>	.540	.518	.490	.455	.419
M <sub>11</sub>	.284	.274	.260	.243	.225
M <sub>12</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>13</sub>	.838	.786	.724	.653	.582
M <sub>14</sub>	.800	.751	.693	.627	.561
M <sub>15</sub>	.686	.647	.601	.547	.493
M <sub>16</sub>	.503	.477	.446	.410	.375
M <sub>17</sub>	.267	.253	.239	.221	.201
M <sub>18</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>19</sub>	.672	.615	.554	.491	.433
M <sub>20</sub>	.645	.591	.534	.474	.419
M <sub>21</sub>	.563	.519	.472	.422	.375
M <sub>22</sub>	.422	.393	.361	.327	.294
M <sub>23</sub>	.228	.214	.199	.182	.167
M <sub>24</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>25</sub>	.383	.342	.304	.266	.231
M <sub>26</sub>	.370	.331	.294	.257	.225
M <sub>27</sub>	.332	.299	.265	.233	.204
M <sub>28</sub>	.262	.238	.213	.189	.167
M <sub>29</sub>	.149	.136	.124	.111	.104
M <sub>30</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>31</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>32</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>33</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>34</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>35</sub>	.0	.0	.0	.0	.0
M <sub>36</sub>	.0	.0	.0	.0	.0

Tabelle 9b

$\kappa$	Rechteckplatte			Elliptische Platte	
	$M(0,0)$	$\bar{M}$	$\psi$	$M_0(0,0)$	$\bar{M}_0$
0,1	.9970	.7437	.7459	.9920	.6614
0,125	.9952	.7339	.7374	.9876	.6584
0,16	.9913	.7200	.7263	.9805	.6537
0,2	.9853	.7041	.7146	.9720	.6479
0,25	.9752	.6847	.7021	.9594	.6396
0,315	.9582	.6600	.6888	.9422	.6281
0,4	.9306	.6290	.6759	.9166	.6111
0,5	.8934	.5944	.6654	.8838	.5892
0,63	.8414	.5528	.6700	.8375	.5583
0,8	.7737	.5041	.6516	.7702	.5134
1,0	.6997	.4547	.6499	.6366	.4244
1,25	.6190	.4033	.6516	.6161	.4107
1,5873..	.5301	.3482	.6700	.5276	.3518
2,0	.4467	.2972	.6654	.4419	.2946
2,5	.3723	.2516	.6759	.3666	.2444
3,1746..	.3018	.2079	.6888	.2968	.1979
4,0	.2438	.1712	.7021	.2400	.1600
5,0	.1961	.1408	.7146	.1944	.1296
6,25	.1586	.1152	.7263	.1569	.1046
8,0	.1244	.0917	.7374	.1235	.0823
10,0	.0997	.0744	.7459	.0992	.0661

Tabelle 10

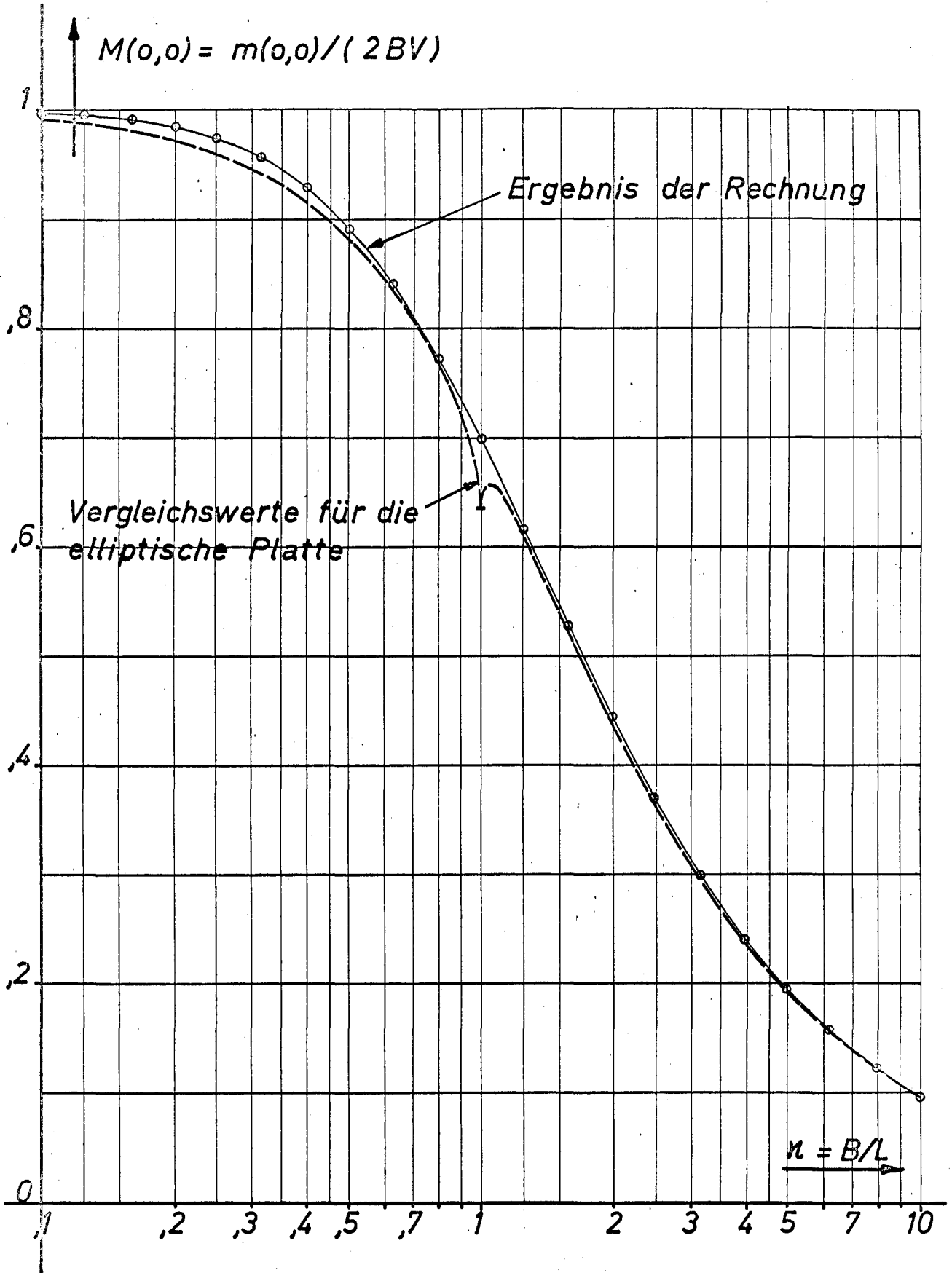


Diagramm 9

Die Völligkeit der Dipolbelegung nähert sich für die Platte mit  $\kappa = 0,1$  bis auf etwa 4 % dem Grenzwert  $\varphi = \pi/4$  für die unendlich lange Platte. Mit steigendem Seitenverhältnis sinkt die Völligkeit der Verteilung bis auf den Wert  $\varphi = 0,6499$  für die quadratische Platte. Dieser Wert liegt niedriger als die Völligkeit <sup>bei</sup> den Ellipsenplatten, ist jedoch noch erheblich größer als die Völligkeit der Verteilung, die aus dem Produkt von zwei elliptischen Verteilungen besteht. Hierfür wäre  $\varphi = \pi^2/16 = 0,6168$ .

Die mittleren Dipolordinaten  $\bar{M}$  und  $\bar{M}_0$  nähern sich für die Rechteckplatten bei  $\kappa = 0,1$  bis auf etwa 5 % dem Grenzwert von  $\pi/4 = 0,7854$  der unendlich langen Platte. Der Verlauf ist im übrigen dem der Völligkeit sehr ähnlich. In allen Fällen ist jedoch  $\bar{M}_0$  kleiner als  $\bar{M}$ .

Es wurde weiter vorn schon darauf hingewiesen, daß eine gute Übereinstimmung zwischen dem Koeffizienten  $C_0$  und den Meßergebnissen von Yu besteht (vgl. Diagramm 8). Ein Vergleich der Tabellen 8 und 10 zeigt, daß die von Yu für den Koeffizienten der hydrodynamischen Masse angegebene Formel in der hier benutzten dimensionslosen Schreibweise eine gute Näherung für die errechneten Dipolordinaten  $M(0,0)$  in der Mitte der Rechteckplatte liefert. Man kann also schreiben:

$$M(0,0) (\kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}}$$

Eine weitere Auswertung der Tabellen 9a und 9b erfolgte in den beiden Diagrammen 10 und 11. In diesen Diagrammen wurden die Schnitte durch die Dipolverteilung dargestellt, und zwar einmal Schnitte entlang der X-Achse und einmal entlang der Y-Achse. Es wurden die Kurven für die Seitenverhältnisse  $\kappa = 0,1, 0,16, 0,25, 0,4, 0,63$  und  $1,0$  gezeichnet. Man erkennt sehr deutlich, daß sich mit abnehmendem Seitenverhältnis die Verteilung entlang der Y-Achse immer stärker einem Halbkreis nähert, während sich die Verteilung entlang der X-Achse immer stärker einem Rechteck annähert.

Besonders für größere Seitenverhältnisse bzw. für sehr kleine Seitenverhältnisse weicht die Dipolverteilung erheblich von

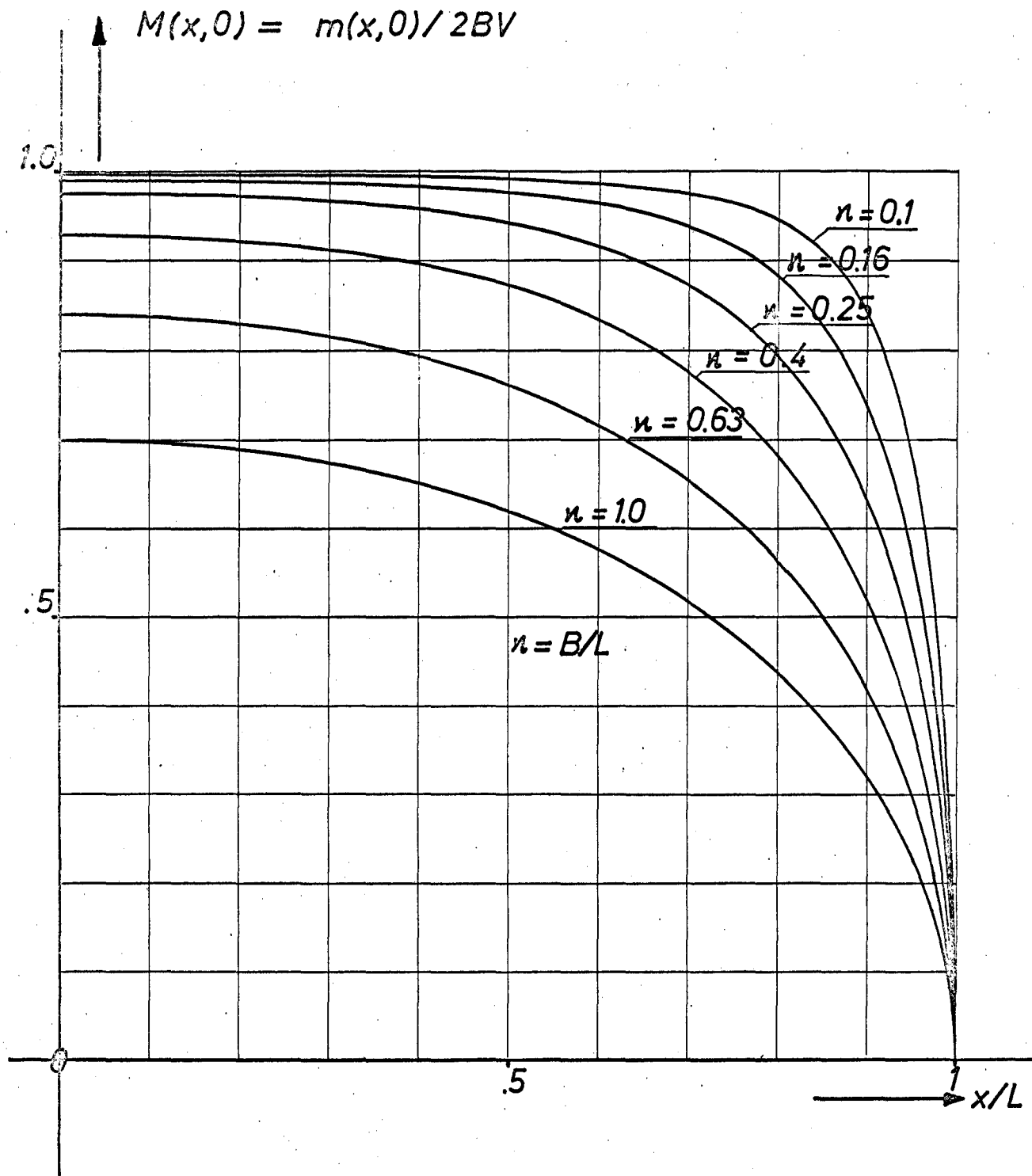


Diagramm 10

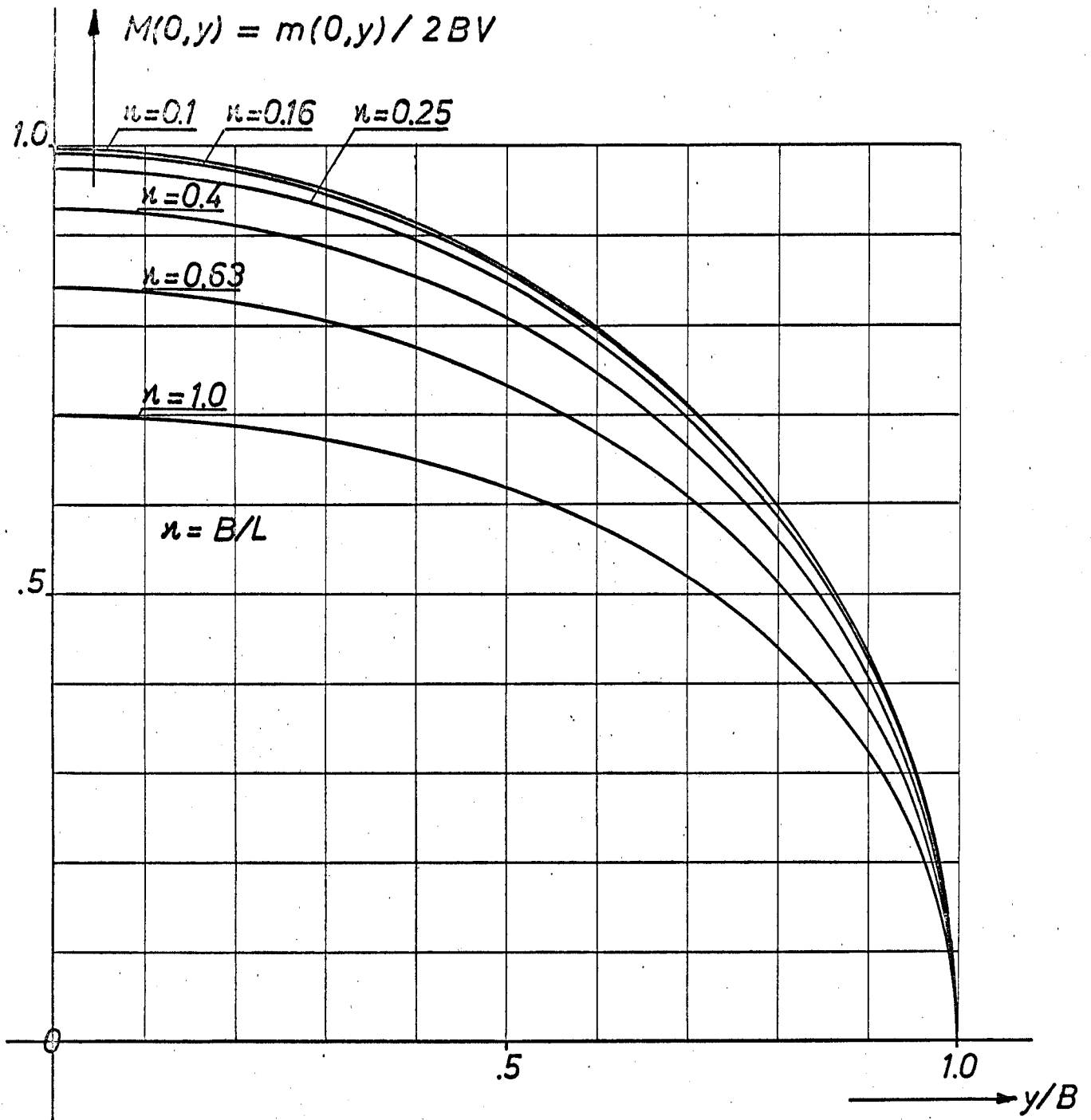


Diagramm 11

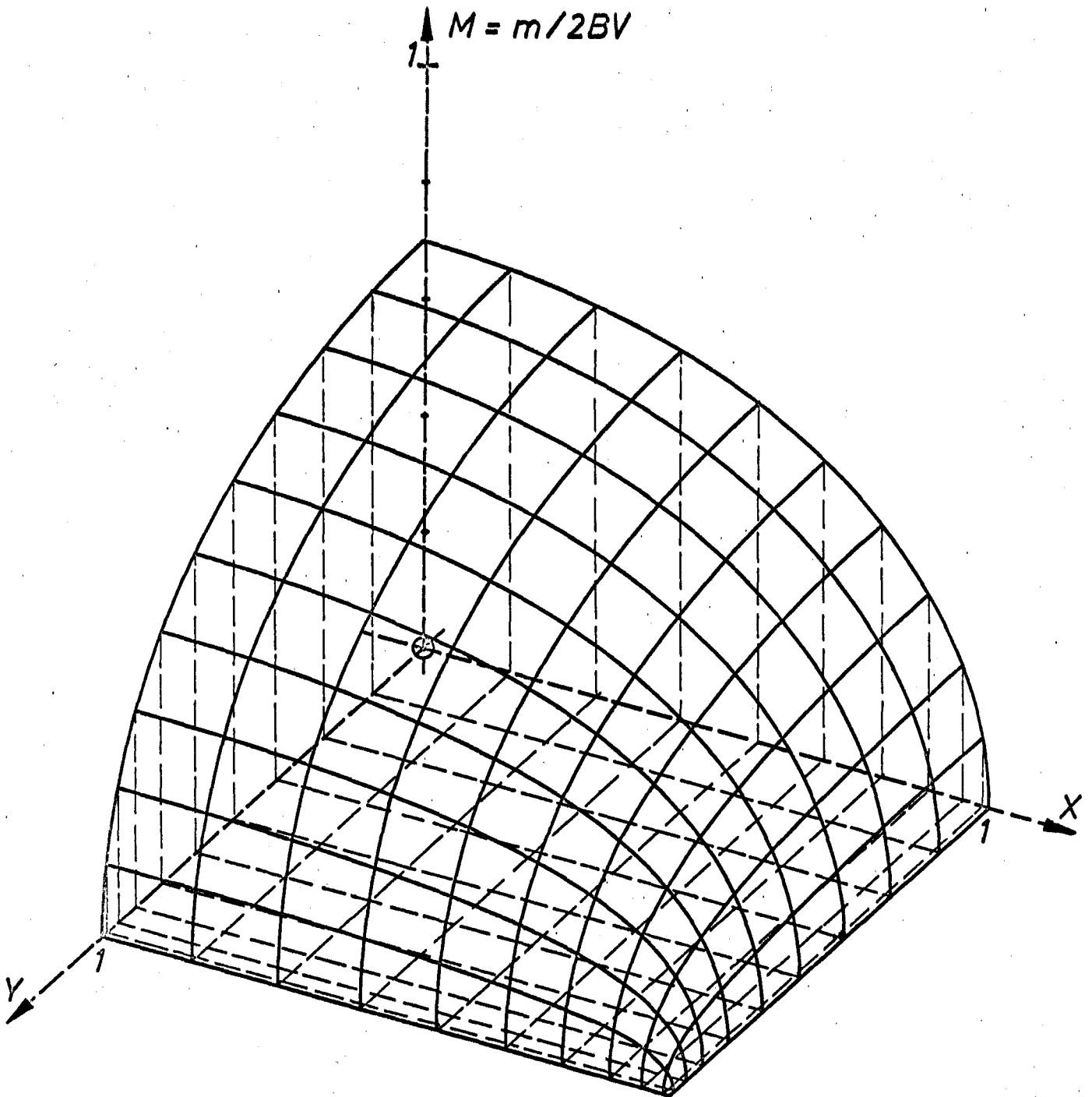
der für die Ellipsenplatte ab. Die Abnahme der Dipole nach den Enden der Platte hin erfolgt langsamer als bei der Ellipse, und die Dipolverteilung wird in Schnitten parallel zur kleineren Plattenachse mit zunehmender Annäherung an die Enden immer völliger. Daraus folgt ein wesentlicher Unterschied zwischen der rechteckigen und der elliptischen Platte:

Bei der elliptischen Platte ist genau wie auch bei Ellipsoiden der Korrekturfaktor  $C_0$  für die nach der Streifenmethode gewonnenen hydrodynamischen Masse gleichzeitig auch der Korrekturfaktor für die in den einzelnen Streifen bestimmte Masse. Dies trifft für die rechteckigen Platte nicht zu. Der Korrekturfaktor muß mit zunehmendem Abstand von der Mitte der Platte abnehmen.

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse wurde im Diagramm 12 die Dipolbelegung für ein Viertel der quadratischen Platte räumlich dargestellt.

## 9. Zusammenfassung

In der vorliegenden Untersuchung wurden Ansätze abgeleitet, die es gestatten, die querbewegte Rechteckplatte durch eine Dipolbelegung auf der Platte darzustellen. Die Darstellung durch Dipole ist besonders günstig, wenn Druckverteilungen und Kräfte für beschleunigte Bewegungen bestimmt werden sollen. Es wurde ein numerischer Ansatz gemacht, der es gestattet, die Dipolbelegung mit sehr großer Genauigkeit zu bestimmen. Die Eigenschaften dieses Ansatzes wurden an Hand systematischer Beispielrechnungen untersucht und ausführlich erläutert. Ein wichtiges Ergebnis ist, daß die Koeffizienten des Reihenansatzes für die Belegung nur dann unabhängig voneinander bestimmt werden könnten, wenn der gewählte Reihenansatz nach Durchführung der Integrationen auf ein Orthogonalsystem führt. Es ist dies außer im Fall des besonders einfachen ebenen Problems kaum zu erreichen. Es bringt keine besonderen Vorteile, wenn der Lösungsansatz selbst ein Orthogonalsystem darstellt.



*Dipolbelegung  $M$  über einem Viertel der quadratischen  
Platte in Translation*

Bei den systematischen Rechnungen konnte mit steigender Zahl von Reihengliedern im Lösungsansatz nur eine geringe Konvergenz bei den Koeffizienten der Reihe beobachtet werden. Dagegen konvergiert das daraus berechnete Ergebnis für die Belegung gut. Eine Überbestimmung des Problems durch zusätzliche Punkte, an denen die Randbedingungen erfüllt werden, bringt kaum einen Vorteil. Die Lage der Punkte, an denen die Randbedingung erfüllt wird, hat einen deutlichen Einfluß auf die Ergebnisse, der jedoch mit steigender Zahl von Aufpunkten kleiner wird.

Für 11 Beispiele von Platten mit Seitenverhältnissen zwischen 0,1 und 1 wurden Rechnungen durchgeführt. Die Ergebnisse wurden mit den Messungen von Pabst und von Yu zur Bestimmung der hydrodynamischen Massen von Platten und mit den theoretischen Ergebnissen für elliptische Platten verglichen. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse der Rechnung ungewöhnlich gut mit den Meßergebnissen übereinstimmen, die Pabst im Jahre 1930 veröffentlichte. Davon weichen die Meßergebnisse von Yu um bis zu 20 % ab. Der Grund dafür wird in den sehr niedrigen Frequenzen vermutet, bei denen diese Messungen durchgeführt wurden.

Überraschend ist die gute Übereinstimmung des Koeffizienten der hydrodynamischen Masse nach den Messungen von Yu mit dem ähnlich definierten Koeffizienten für die Ellipsenplatten und mit der normierten Dipolstärke in der Mitte der Rechteckplatten.

Die Ergebnisse für die Dipolbelegung und damit auch für die Verteilung der instationären Anteile des Drucks wurden besonders auch im Vergleich zu den Verteilungen für die elliptische Platte ausführlich diskutiert.

10. Literaturverzeichnis

1. Abramowitz, M., und I.A. Stegun: 'Handbook of mathematical functions', National Bureau of Standards, Appl. Math. Series 55 (1964)
2. Glauert, H.: 'The elements of aerofoil and airscrew theory', Cambridge University Press (1948)
3. Gröbner, W., und N. Hofreiter: 'Integraltafel, Teil I: Unbestimmte Integrale', Springer-Verlag, Wien und Innsbruck (1957)
4. Isay, W.H., und R. Armonat: 'Zur Berechnung der potentialtheoretischen Druckverteilung am Flügelblatt eines Propellers', Schiffstechnik 13 (1966), p. 75 - 89
5. Jahnke - Emde - Lösch: 'Tafeln höherer Funktionen', 6. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1960)
6. Lighthill, M.J.: 'Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und die verallgemeinerten Funktionen', Hochschultaschenbuch, Bibliographisches Institut, Mannheim (1966)
7. Meyerhoff, W.K.: 'Die Berechnung hydroelastischer Stöße', Schiffstechnik 12 (1965), p. 18 - 30 und 49 - 64
8. Pabst, W.: 'Theorie des Landestoßes von Seeflugzeugen', Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 21 (1930), p. 217 - 226
9. Robinson, A., und J.A. Laurmann: 'Wing theory', Cambridge University Press (1956)
10. Ryshik, I.M., und I.S. Gradstein: 'Summen-, Produkt- und Integraltafeln', VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957)
11. Schmieden, C.: 'Über den Landestoß von Flugzeugschwimmern',

Ingenieur - Archiv 10 (1939), p. 1 - 13

12. Yu, Y.-T.: 'Virtual masses of rectangular plates and parallel-epipeds in water', Journal of Appl. Physics 16 (1945), p. 724 - 729

Anhang I: ALGOL - Programm

```
'BEGIN'  
'COMMENT' RAHMENPROGRAMM FUER WKM 2 .,  
'PROCEDURE' ADIVB., 'CODE'.,  
  
'REAL' 'PROCEDURE' U (X, K, R).,  
  'VALUE' X, K, R.,  
  'REAL' X.,  
  'INTEGER' K, R.,  
  'BEGIN'  
    'REAL' PSI, S.,  
    PSI . = ARCCOS (X) .,  
    'IF' R 'EQUAL' 0 'THEN' 'GOTO' L1 .,  
    S . = SIN (PSI) .,  
    'IF' R 'EQUAL' 2 'THEN' 'GOTO' L2 .,  
    'IF' R 'EQUAL' 4 'THEN' 'GOTO' L3 .,  
    'IF' R 'EQUAL' 6 'THEN' 'GOTO' L4 'ELSE' 'BEGIN' U. = 2.0.,  
      'GOTO' L99 'END'.,  
  L1.. U. = SIN (K*PSI) ., 'GOTO' L99.,  
  L2.. U. = -(((K+1)* K* COS((K-1)* PSI)  
    -((K-1)* K* COS((K+1)* PSI)) / (2.0* S'POWER'3) .,  
    'GOTO' L99.,  
  L3.. U. = -((((K+6)* K+ 11)* K+6)* K* COS((K-3)* PSI)  
    -(((3*K+ 6)* K- 27)* K -54)* K* COS((K-1)* PSI)  
    +(((3*K- 6)* K -27)* K +54)* K *COS((K+1)* PSI)  
    -(((K- 6)* K +11)* K -6)* K* COS((K+3)* PSI)) / (8.0* S'POWER'  
    7) .,  
    'GOTO' L99.,  
  L4.. U. = -((((((K +15)* K +85)* K +225)*K +274)* K +120)* K* COS((K-5)*  
    PSI)  
    -((((5*K +45)* K +5)* K -1005)* K -3250)* K -3000) * K *  
    COS((K-3)* PSI)  
    +((((10*K +30)* K -410)* K -1230)* K +4000)* K +12000)* K*  
    COS((K-1)* PSI)  
    -((((10*K -30)* K -410)* K +1230)* K +4000)* K -12000) *K*  
    COS((K+1)* PSI)  
    +((((5*K -45)* K +5)* K +1005)* K -3250)* K +3000)* K*  
    COS((K+3)* PSI)  
    -((((K- 15)* K +85)* K -225)* K +274)* K -120)* K *  
    COS((K+5)* PSI)) / (32.0* S'POWER'11) .,  
  L99.. 'END' ENDE DES UNTERPROGRAMMS U. .,  
  
'REAL' 'PROCEDURE' SINGIN (X, Y, D, KA, I, K) .,  
  'VALUE' X, Y, D, KA, I, K.,  
  'REAL' X, Y, D, KA., 'INTEGER' I, K.,  
  'BEGIN'  
    'REAL' WU, LO, T00, T20, T40, T22, T60, T42, UI0, UI2, UI4, UI6,  
      UK0, UK2, UK4, UK6, DO, EX.,  
    WU. = SQRT(2.0) .,  
    LO. = LN ((WU +1)/(WU -1)) .,  
    T00. = -4.0* WU/ D., T20. = 2.0* LO* D.,  
    DO. = D* D* D.,  
    T40. = (2.0* WU -LO)* DO., T22. = 4.0/3.0* (LO -WU)* DO.,  
    DO. = DO* D* D.,  
    T60. = (0.75* LO -0.5* WU)* DO., T42. = (0.4* WU -0.2*LO) * DO.,  
    EX. = KA* X.,  
    UI0 . = U(EX, I, 0) ., UI2 . = U(EX, I, 2) * KA*KA .,  
    UI4 . = U(EX, I, 4) * KA 'POWER' 4 .,  
    UI6 . = U(EX, I, 6) * KA 'POWER' 6 .,  
    UK0. = U (Y, K, 0) ., UK2. = U (Y, K, 2) .,
```

```
UK4.= U (Y, K, 4) ., UK6.= U (Y, K, 6) .,  
SINGIN.= UI0* UK0* T00  
+0.5* (UI0* UK2 +UI2* UK0)* T20  
+(UI0*UK4 +UI4* UK0)* T40/24.0  
+0.25* UI2* UK2* T22  
+(UI0* UK6 +UI6* UK0)* T60/720.0  
+(UI2* UK4 +UI4* UK2)* T42/48.0 .,  
'END' ENDE DES UNTERPROGRAMMS SINGIN. .,
```

'PROCEDURE' ALLE I ( D, DM, KA, U1, V, H, M, N, INT, ID ) .,

'VALUE' D, DM, KA, U1, V, H, M, N. .,

'REAL' D, DM, KA, U1, V, H .,

'INTEGER' M, N, ID .,

'ARRAY' INT .,

'BEGIN'

'REAL' AO, A1, B, BO, CO, D1, D2, D3, D4, D5, D6, DA, DD, DE, DEL,  
DI, DIX, DMA, DO, DX, E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9,  
KAX, KAY, L, X, X1, X2, X3, Y, Y1, Y2, Y3, YA, ZW .,

'REAL' A2, A3, DY .,

'INTEGER' JJ, KK, LX, LY, MM, NN, Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z9, Z0 .,

'IF' N 'GREATER' M 'THEN' MM.=N 'ELSE' MM.=M .,

'BEGIN'

'ARRAY' DEPOT X (/1..MM, 1..3/), DEPOT Y (/1..MM, 1..3/),  
INTEG (/1..M, 1..N/). .,

L0.. Z9 . = 0 .,

'FOR' LX.=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'

'FOR' LY.=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'

INTEG (/LX,LY/) . = 0.0 .,

X . = U1 .,

Y . = V .,

L . = 1.0/ KA .,

B . = 1.0 .,

MI . = M .,

NM . = N .,

KAX . = KA .,

KAY . = 1.0 .,

DMA . = DM .,

'IF' ABS(U1) + 2.0\* D 'GREATER' L 'THEN'

D . = 0.5 \* (L - ABS(U1)) .,

'IF' ABS(V) + 2.0\* D 'GREATER' B 'THEN'

D . = 0.5\* (B - ABS(V)) .,

DA . = D .,

L1.. Z1 . = 4. .,

L2.. 'IF' Z1 'EQUAL' 0 'THEN' 'GOTO' L8 .,

DD . = DA .,

DE . = DA .,

AO . = X + DD - L .,

'IF' AO 'NOTLESS' 0 'THEN' 'GOTO' L7 .,

DX . = DD 'POWER' 1.3 / H .,

'IF' DX 'GREATER' DMA 'THEN' DX . = DMA .,

DIX . = DX .,

'IF' AO + 2.0\* DX 'NOTLESS' 0 'THEN' 'BEGIN'

Z5 . = 4 .,

Z4 . = Z5 .,

DX . = 0.125 \* (L - X - DD) .,

'GOTO' M1 'END' .,

'IF' AO + 4.0\* DX 'NOTLESS' 0 'THEN' 'BEGIN'

Z5 . = 2 .,

Z4 . = Z5 .,

DX . = 0.5\* DX .,

'GOTO' M1 'END' .,

Z4 . = 1 .,

Z5 . = 1 .,

M1.. Z2 . = 1 .,

DD . = DD + 2.0\* DIX .,

```
L3.. DO := DE + X ..
DEL := 0.225 403 3308 * DX ..
X1 := DO + DEL ..
X2 := DO + DX ..
X3 := X2 + DX - DEL ..
D1 := (X1 - X) 'POWER' 2 ..
D2 := (X2 - X) 'POWER' 2 ..
D3 := (X3 - X) 'POWER' 2 ..
X1 := X1 * KAX ..
X2 := X2 * KAX ..
X3 := X3 * KAX ..
'FOR' LX := 1 'STEP' 1 'UNTIL' MM 'DO'
  'BEGIN'
    JJ := 2 * LX - 1 ..
    DEPOT X (/LX, 1/) := U (X1, JJ, 0) * 5.0 ..
    DEPOT X (/LX, 2/) := U (X2, JJ, 0) * 8.0 ..
    DEPOT X (/LX, 3/) := U (X3, JJ, 0) * 5.0 ..
  'END' ..
YA := Y ..
Z3 := 0 ..
L4.. 'IF' Z3 'EQUAL' 1 'THEN' 'GOTO' L6 ..
DY := Z2 * DIX ..
BO := Z2 * (YA - Y + 2 * DY) - DD ..
'IF' BO 'NOTLESS' 0 'THEN' 'BEGIN'
  Z3 := 1 ..
  DY := 0.5 * (Y - YA + Z2 * DD) 'END' ..
CO := Z2 * YA - B ..
'IF' CO 'NOTLESS' 0 'THEN' 'GOTO' L6 ..
CO := CO + Z2 * 2.0 * DY ..
'IF' CO 'NOTLESS' 0 'THEN' 'BEGIN'
  DY := 0.125 * (Z2 * B - YA) ..
  Z6 := 4 ..
  Z3 := 1 ..
  'GOTO' L5 'END' ..
CO := CO + Z2 * 2.0 * DY ..
'IF' CO 'NOTLESS' 0 'THEN' 'BEGIN'
  DY := 0.5 * DY ..
  Z6 := 2 ..
  'GOTO' L5 'END' ..
Z6 := 1 ..
L5.. DEL := 0.225 403 3308 * DY ..
Y1 := YA + DEL ..
Y2 := YA + DY ..
Y3 := Y2 + DY - DEL ..
D4 := (Y1 - Y) * (Y1 - Y) ..
D5 := (Y2 - Y) * (Y2 - Y) ..
D6 := (Y3 - Y) * (Y3 - Y) ..
Y1 := KAY * Y1 ..
Y2 := KAY * Y2 ..
Y3 := KAY * Y3 ..
E1 := (D1 + D4) * SQRT (D1 + D4) ..
E2 := (D1 + D5) * SQRT (D1 + D5) ..
E3 := (D1 + D6) * SQRT (D1 + D6) ..
E4 := (D2 + D4) * SQRT (D2 + D4) ..
E5 := (D2 + D5) * SQRT (D2 + D5) ..
E6 := (D2 + D6) * SQRT (D2 + D6) ..
E7 := (D3 + D4) * SQRT (D3 + D4) ..
E8 := (D3 + D5) * SQRT (D3 + D5) ..
E9 := (D3 + D6) * SQRT (D3 + D6) ..
'FOR' LY := 1 'STEP' 1 'UNTIL' NN 'DO'
  'BEGIN'
    KK := 2 * LY - 1 ..
    A1 := U (Y1, KK, 0) * 5.0 ..
    A2 := U (Y2, KK, 0) * 8.0 ..
    A3 := U (Y3, KK, 0) * 5.0 ..
```

```

DEPOT Y (/LY, 1/) . = A1/E1 + A2/E2 + A3/E3 .,
DEPOT Y (/LY, 2/) . = A1/E4 + A2/E5 + A3/E6 .,
DEPOT Y (/LY, 3/) . = A1/E7 + A2/E8 + A3/E9 'END' .,
'FOR' LX,=1 'STEP' 1 'UNTIL' MM 'DO'
  'BEGIN'
  'FOR' LY,=1 'STEP' 1 'UNTIL' NN 'DO'
    'BEGIN'
    DI . = DEPOT X (/LX, 1/) * DEPOT Y (/LY, 1/)
      + DEPOT X (/LX, 2/) * DEPOT Y (/LY, 2/)
      + DEPOT X (/LX, 3/) * DEPOT Y (/LY, 3/) .,
    'IF' Z1 'EQUAL' 4 'OR' Z1 'EQUAL' 2 'THEN'
      INTEG (/LX, LY/) . = INTEG (/LX, LY/)
        + DX * ABS (DY) * DI / 81.
    'ELSE'
      INTEG (/LY, LX/) . = INTEG (/LY, LX/)
        + DX * ABS (DY) * DI / 81.0 .,
    'END' .,
  'END' .,
Z9 . = Z9 + 1 .,
Z6 . = Z6 - 1 .,
YA . = YA + 2.0 * DY .,
'IF' Z6 'EQUAL' 0 'THEN' 'GOTO' L4 'ELSE' 'GOTO' L5 .,
L6.. Z4 . = Z4 - 1 .,
'IF' Z4 'NOTEQUAL' 0 'THEN' 'BEGIN'
  DE . = DE + 2.0 * DX .,
  'GOTO' L3 'END' .,
DD . = DA .,
DE . = DA .,
Z4 . = Z5 .,
'IF' Z2 'GREATER' 0 'THEN' 'BEGIN'
  Z2 . = -Z2 .,
  'GOTO' L3 'END' .,
L7.. ZW . = L .,
L . = B .,
B . = ZW .,
ZW . = X .,
X . = Y .,
Y . = -ZW .,
ZO . = MM .,
MM . = NN .,
NN . = ZO .,
ZW . = KAX .,
KAX . = KAY .,
KAY . = -ZW .,
Z1 . = Z1 - 1 .,
'GOTO' L2 .,
L8.. DA . = DA + 2.0 * DIX .,
'IF' (DA - L - ABS (U1)) 'GREATER' 0 'AND' (DA - B - ABS (V))
  'GREATER' 0 'THEN' 'GOTO' L99 'ELSE' 'GOTO' L1 .,
L99.. 'FOR' LX,=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
  'BEGIN'
  JJ . = 2 * LX - 1 .,
  'FOR' LY,=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN'
    KK . = 2 * LY - 1 .,
    INT (/LX, LY/) . = - INTEG (/LX, LY/)
      - SINGIN ( U1, V, D, KA, JJ, KK ) .,
    'END' .,
  'END' .,
ID . = Z9 .,
'END' .,
'END' ENDE DES UNTERPROGRAMMS ALLE I .,

```

'PROCEDURE' JMN ( X, Y, KA, D, DM, H, M, N, JOT, Z ) .,  
'VALUE' X, Y, KA, D, DM, H, M, N .,

```
'REAL' X, Y, KA, D, DM, H ..
'INTEGER' M, N, Z ..
'ARRAY' JOT ..
  'BEGIN' 'COMMENT' DAS ERGEBNISARRAY JOT(1..M*N) IST IN FOLGENDER
  WEISE GEORDNET..
    J (0,0) , J (1,0) , J (2,0) , . . . J (M-1,0),
    J (0,1) , J (1,1) , J (2,1) , . . . J (M-1,1),
    J (0,2) , J (1,2) , J (2,2) , . . . J (M-1,2),
    . . . . .
    J (0,N-1), J (1,N-1), J (2,N-1), . . . J (M-1,N-1)..
  'INTEGER' M1, M2, MA, MB, MO, N1, N2, NA, NB, NO ..
  'ARRAY' I (/1..M,1..N/)..
  ALLE I ( D, DM, KA, X, Y, H, M, N, I, Z ) ..
  JOT (/1/) = I (/1,1/)..
  'FOR' NO.=1 'STEP' 1 'UNTIL' N-1 'DO' 'BEGIN'
  M1.= M* NO+ 1..
  NA.= 2* NO+ 1.. NB.= NA-2.. N1.= NO+ 1..
  JOT (/M1/) = 0,5* ( I (/1,N1/) /NA - I (/1,NO/) /NB)..
  'END'..
  'FOR' MO.=2 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO' 'BEGIN'
  MA.= 2* MO- 1.. MB.= MA- 2.. M1.= MO- 1..
  JOT (/MO/) = 0,5* ( I (/MO,1/) /MA - I (/M1,1/) /MB)..
  'FOR' NO.=2 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
  NA.= 2* NO- 1.. NB.= NA- 2.. N1.= NO- 1..
  M2.= M* N1+ MO..
  JOT (/M2/) = 0,25* ( I (/MO,NO/) /MA/NA - I (/MO,N1/) /MA/NB -
    I (/M1,NO/) /MB/NA + I (/M1,N1/) /MB/NB ) ..
  'END'.. 'END'..
'END' ENDE DES UNTERPROGRAMMS JMN..
```

```
'PROCEDURE' WKM 2( X, Y, V, K, D, DM, H, M, N, KAPPA, AMN, ID, Z ) ..
'VALUE' K, D, DM, H, M, N, KAPPA ..
'REAL' D, DM, H, KAPPA ..
'INTEGER' K, M, N, ID, Z ..
'ARRAY' X, Y, V, AMN ..
  'BEGIN' 'COMMENT' DIE VARIABLE ID ERHAELT DEN WERT '1', WENN DIE
  MATRIX IN ORDNUNG IST, SIE ERHAELT DEN WERT '2', WENN DIE
  MATRIX SINGULAER IST. DIE CODE PROCEDURE 'ADIVB' MUSS VER
  EINBART WERDEN..
  'INTEGER' MO..
  MO.= M*N..
  'BEGIN'
  'REAL' MA, BO..
  'INTEGER' IA, IB, IK, K1, L, ZO ..
  'ARRAY' AM, RS, LOES (/1..MO/), MAT (/1..K,1..MO/),
  MAT1 (/1..MO, 1..MO/ ) ..
  Z = 0 ..
  'FOR' K1.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'
  'BEGIN'
  JMN ( X(/K1/), Y(/K1/), KAPPA, D, DM, H, M, N, AM, ZO ) ..
  'FOR' L.=1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO'
  MAT (/K1, L/) = AM (/L/ ) ..
  'IF' ZO 'GREATER' Z 'THEN' Z = ZO ..
  'END' ..
  'IF' K 'EQUAL' MO 'THEN' 'GOTO' R1 'ELSE'
  'FOR' IA.=1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO' 'BEGIN'
  'FOR' IB.=1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO' 'BEGIN'
  MA.= 0..
  'FOR' IK.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'
  MA.= MA+ MAT(/IK,IA/)* MAT(/IK, IB/)..
  MAT1(/IB,IA/)= MA..
  'END'.. 'END'..
  'FOR' IA.= 1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO' 'BEGIN'
  BO.= 0..
  'FOR' IK.= 1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'
```

```
BO.= BO+ MAT(/IK,IA/)* V(/IK/),,  
RS(/IA/)= BO.,,  
'END',,  
'GOTO' R2.,  
R1.. 'FOR' IA.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'  
'FOR' IB.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'  
MAT1(/IB,IA/)= MAT(/IA,IB/),,  
'FOR' IA.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'  
RS(/IA/)= V(/IA/),,  
R2.. ADIVB (RS, MAT1, LOES, $-5, R3),,  
'FOR' IA.=1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO'  
AMN(/IA/)= LOES(/IA/)* 6.283185307.,  
ID.= 1.,  
'GOTO' R99.,  
R3.. ID.= 2.,  
'FOR' IA.= 1 'STEP' 1 'UNTIL' MO 'DO'  
AMN(/IA/)= 0.,  
R99..'END',, 'END' ENDE DES UNTERPROGRAMMS WKM2.,
```

```
'REAL' D, DM, H, KAPPA, DA, IX, IY, DI.,  
'INTEGER' K, M, N, I, J, ID, L, IL, MA, MO, M1, NA, NO, N1.,  
J.= 1.,  
A1.. READ (KAPPA),,  
'IF' KAPPA 'EQUAL' 0 'THEN' 'GOTO' A99 'ELSE'  
READ (D, DM, H, M, N, K),,  
'BEGIN'  
'ARRAY' X, Y, V, X1 (/1..K/), AMN (/1..M*N/),,  
'FOR' I.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'  
'BEGIN'  
READ (X(/I/), Y(/I/), V(/I/)),,  
X1(/I/)= X(/I/) /KAPPA.,  
'END',,  
OUTPUT(1, ((' 5B, (('KOEFFIZIENTEN FUER DIE DIPOLBELEGUNG DER'))',  
 ((' RECHTECKPLATTE. PROGRAMM-VERSION 2 VOM 28.11.66'))',  
 //, 5B, ((' SET OF DATA NO.))', 2ZD, //, 5B,  
 (('INPUT DATA..))', /, 5B, (('KAPPA='))', 3B-2Z.5D, /, 5B,  
 (('D =))', 4B-Z.5D, /, 5B, (('DMAX =))', 4B-Z.5D, /, 5B,  
 (('H =))', 2B-3Z.3D, /, 5B, (('M =))', 2B-2ZD, 7B,  
 (('X-RICHTUNG'))', /, 5B, (('N =))', 2B-2ZD, 7B,  
 (('Y-RICHTUNG'))', //, 5B, (('K =))', 2B-2ZD, //))',  
 J, KAPPA, D, DM, H, M, N, K),,  
'FOR' I.=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'  
OUTPUT(1, (('15B, (('X(I))', ZD, ((') =))', -2Z.7D, 5B, (('Y(I))',  
 ZD, ((') =))', -2Z.7D, 5B, (('V(I))', ZD, ((') =))',  
 -2Z.7D, //))', I, X1(/I/), I, Y(/I/), I, V(/I/)).,  
WKM 2 (X1, Y, V, K, D, DM, H, M, N, KAPPA, AMN, ID, MO) .,  
'IF' ID 'EQUAL' 2 'THEN' 'BEGIN'  
OUTPUT (1, ((' 50B, (('SINGULAERE MATRIX'))' )) ) .,  
'GOTO' A2 'END' .,  
OUTPUT (1, ((' //, 25B, (('RESULTS..))', /, 25B, (('-----))',  
 //, 25B, (('ZAEHLER =))', 4ZD, 3B, ((' (GROESSTE ZAHL))',  
 ((' VON FLAECHENELEMENTEN))', //, 25B, (('A( M, N)..))',  
 / ))', MO) .,  
L.=0.,  
'FOR' I.=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'  
NO.= I-1.,  
'FOR' IL.=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO' 'BEGIN'  
L.= L+1.,  
MO.= IL-1.,  
OUTPUT(1, (('25B, (('A(I))', ZD, ((','))', ZD, ((') =))', 2B-2Z.7D,  
 / ))', MO, NO, AMN(/L/)),,  
'END',, 'END',,  
OUTPUT (1, (('//, 25B, (('DIPOLAUFMASSE ..))', //))' ) .,  
'BEGIN'
```

```
'INTEGER' L1 ..
'REAL' IX1 ..
'FOR' L1.=0 'STEP' 1 'UNTIL' 10 'DO'
'BEGIN'
IX .= 0.1 * L1 * 1.570 796 3267 ..
IX .= SIN (IX) ..
IX1 .= IX/KAPPA ..
'FOR' L.=0 'STEP' 1 'UNTIL' 10 'DO'
'BEGIN'
IY .= 0.1 * L * 1.570 796 3267 ..
IY .= SIN (IY) ..
DA.= AMN(/1/)* U(IX, 1, 0)* U(IY, 1,0)..
DI.= 0.
'FOR' I.=2 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO' 'BEGIN'
MO.= 2*I-1., M1.= MO- 2.
DI.= DI+ AMN(/I/)* 0.5* (U(IX, MO, 0)/MO- U(IX, M1, 0)/M1)..
'END'..
DA.= DA+ DI* U(IY, 1, 0)..
'FOR' I1.=2 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
NO.= 2*I1-1., N1.= NO- 2., NA.= (I1- 1)* M.
DI .= AMN (/NA+ 1/) * U (IX, 1, 0) ..
'FOR' I.=2 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO' 'BEGIN'
MO.= 2*I -1., M1.= MO- 2.
MA.= NA+ 1.
DI.= DI+ AMN(/MA/)* 0.5*( U(IX, MO, 0)/MO- U(IX, M1, 0)/M1)..
'END'..
DA.= DA+ DI* 0.5* (U(IY, NO, 0)/NO- U(IY, N1, 0)/N1)..
'END'..
OUTPUT(1, '( 5B, '(IX( )', ZD, '( ) = )', -2Z.5D, 7B, '(IY( )',
2D, '( ) = )', -2Z.5D, 7B, '(DIPOL = )', -2Z.7D, / )',
L1, IX1, L, IY, DA) ..
'END'..
OUTPUT(1, '( / )' ) ..
'END'..
'END'..
'BEGIN' 'REAL' KLAMMER, C1, C2, PI..
'IF' M 'GREATER' 1 'AND' N 'GREATER' 1 'THEN'
'BEGIN'
KLAMMER .= 4.0 * AMN(/1/) - 2.0 * AMN(/2/) - 2.0 * AMN(/M+1/)
+ AMN(/M+2/) ..
'GOTO' A90
'END'
'ELSE'
'IF' M 'EQUAL' 1 'AND' N 'EQUAL' 1 'THEN'
'BEGIN'
KLAMMER .= 4.0 * AMN(/1/) ..
'GOTO' A90
'END'
'ELSE'
KLAMMER .= 4.0* AMN(/1/) - 2.0 * AMN(/2/) ..
A90..PI .= 3.141 592 653 5 ..
C1 .= PI * 0.0625 * KLAMMER ..
C2 .= PI * C1 / KAPPA * 0.125 ..
OUTPUT(1, '(//, 5B, '(GESAMTDIPOLSTAERKE..)', /,5B, '(C1 = )',
2B-2Z.7D, 10B, '(BEZOGEN AUF ZYLINDER)', /, 5B, '(C2 = )',
2B-2Z.7D, 10B, '(KOEFFIZIENT NACH PABST)',/)', C1,C2)..
'END'..
A2.. OUTPUT(1, '( * )' )..
J.= J+ 1.
'GOTO' A1.
'END'..
A99..OUTPUT(1, '( ( ENDE DER DATEN ) )' )..
'COMMENT'
ENDE DES RAHMENPROGRAMMS,
EINGABESCHEMA..
```

KAPPA = SEITENVERHAELTNIS = BREITE (Y) / LAENGE (X)  
( KAPPA . = 0 BEDEUTET DAS ENDE DER RECHNUNG ),  
D = INNERE HALBE SEITENLAENGE DES KLEINSTEN INTEGRATIONSRINGES  
BZW. DES SINGULAEREN QUADRATS,  
DM = GROESSTE SCHRITTWEITE ( HALBSCHRITT ),  
H = HILFSGROESSE FUER SCHRITTWEITE..  
KLEINSTE SCHRITTWEITE (HALBSCHRITT).. DX . = D POWER 1.3  
/ H ,  
M = ZAHL DER BELEGUNGSFUNKTIONEN IN X-RICHTUNG ( LAENGE ),  
N = ZAHL DER BELEGUNGSFUNKTIONEN IN Y-RICHTUNG ( BREITE ),  
K = ZAHL DER AUFPUNKTE ( K NOTLESS M\*N ),  
ARRAY..  
X (1), Y (1), V (1), X (2), . . . V (K),  
X = AUFPUNKTABSZISSE AUF HALBE LAENGE BEZOGEN  
( ZUR KONTROLLE WIRD X/KAPPA AUSGEGEBEN ),  
Y = AUFPUNKTORDINATE AUF HALBE BREITE BEZOGEN,  
V = GESCHWINDIGKEIT AM AUFPUNKT.,

'END'.,

Anhang II: Vergleichswerte für die Ellipsenplatten

Das Geschwindigkeitspotential der querbewegten Ellipsenplatte mit den Halbachsen B und L (vgl. Diagramm 13) an der Platte selbst ( $z = 0$ ) läßt sich in der Form angeben - vgl. dazu z.B. Schmieden (1939)<sup>11</sup> -

$$\phi_0(x, y, 0) = - \frac{VB}{E(\kappa')} \sqrt{1 - (x/L)^2 - (y/B)^2}, \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2} = \sqrt{1 - (B/L)^2}.$$

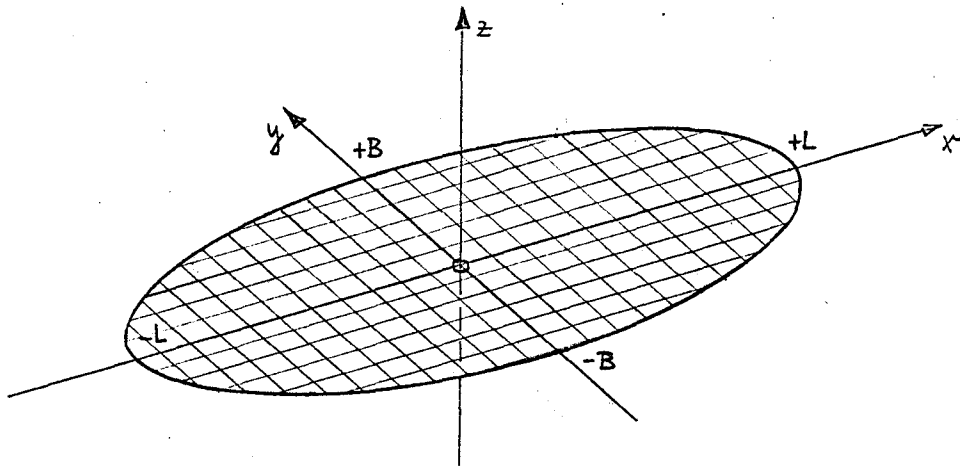


Diagramm 13

Die Platte kann dann durch eine Dipolbelegung  $m_0$  dargestellt werden von der Form:

$$m_0(x, y) = 2\phi_0 = - \frac{2BV}{E(\kappa')} \sqrt{1 - (x/L)^2 - (y/B)^2}$$

$$M_0(x, y) = \frac{m_0(x, y)}{2BV} = \frac{1}{E(\kappa')} \sqrt{1 - (x/L)^2 - (y/B)^2}, \quad (\text{A.2})$$

wenn E das vollständige elliptische Integral darstellt.

Dann ist:

$$M_0(0, 0) = \frac{1}{E(\kappa')}. \quad (\text{A.3})$$

Der Koeffizient der hydrodynamischen Masse soll in Anlehnung an die Definition von C so definiert werden, daß er der

Korrekturfaktor bei Anwendung der Streifenmethode ist. Man errechnet für die hydrodynamische Masse:

$$M_0''(\kappa) = \frac{4\pi\rho B^2L}{3E(\kappa')} \quad (\text{A.4})$$

Es gilt dann weiter für den Koeffizienten  $C_0(\kappa)$ :

$$C_0(\kappa) = \frac{M_0''(\kappa)}{4\pi/3 \cdot \rho B^2L} = \frac{1}{E(\kappa')} \quad (\text{A.5})$$

Die Völligkeit der Dipolverteilung  $\varphi_0$  wird in der Weise bestimmt, daß das Volumen unter der Dipolbelegung auf das Volumen des umschriebenen elliptischen Zylinders bezogen wird. Es gilt:

$$\varphi_0 = \frac{1}{M_0(0,0) \cdot \pi BL} \iint_{\text{Ellipse}} M_0(x,y) dx dy$$
$$\varphi_0 = 2/3 \quad (\text{A.6})$$

Für die mittlere Ordinate  $\bar{M}_0$  errechnet man:

$$\bar{M}_0 = \varphi_0 \cdot M_0(0,0)$$
$$\bar{M}_0 = \frac{2}{3E(\kappa')} \quad (\text{A.7})$$